

Zbornik del

KUHLJEVI DNEVI 2009

Cerklje na Gorenjskem,
24. september, 2009

Uredila:
Miha Boltežar
Janko Slavič



KUHLJEVI DNEVI 2009

Cerknje na Gorenjskem, 24. september, 2009

ZBORNIK DEL

Uredila:

Miha Boltežar
Janko Slavič

Recenzija:

Milan Batista
Miha Boltežar
Andrej Bombač
Matjaž Hriberšek
Jože Korelc
Franc Kosel
Miran Saje
Janko Slavič
Brane Širok

Izdalo in založilo:

Slovensko društvo za mehaniko
Jamova 2, Ljubljana
September, 2009

Oblikovanje naslovnice:

Monika Lovše

Tisk in vezava:

Grafika Bonifer d.o.o.

Naklada:

90 izvodov

Kazalo

Sledenje delcem v toku viskozne tekočine, <i>Jure Ravnik, Matjaž Hribaršek, Janez Lupše</i>	1
Algoritem za določitev vektorja hitrosti za anemometer z vročimi žičkami konstantne temperature, <i>Viktor Sajn, Milovan Kotur, Franc Kosel</i>	9
Modeliranje turbulentnega toka v porozni snovi, <i>Janja Kramer, Renata Jecl, Leopold Škerget</i>	17
Računalniška analiza porabe energije in časov pomešanja v posodi z modificiranim turbinskim mešalom, <i>Andrej Bombač, Dečan Beader, Iztok Žun</i>	25
Impact of guard grill to operating characteristics of axial fan and its contour optimization, <i>Gregor Alič, Brane Širok, Marko Hočevar</i>	33
Paralelizacija algoritma za simulacijo toka viskozne tekočine, <i>Janez Lupše, Leopold Škerget, Jure Ravnik</i>	41
Numerično modeliranje sklopljenega primera naravne in prisilne konvekcije v toku mikropolarnih tekočin preko kotanje, <i>Matej Zadravec, Matjaž Hribaršek, Leopold Škerget</i>	49
Računalniško podprtoto razdeljevanje in vrednotenje domačih nalog pri mehaniki, <i>Boštjan Harl, Marko Kegl</i>	57
Vpliv gibajočih se teles na gradbene konstrukcije, <i>Peter Češarek, Dejan Zupan, Miran Saje</i>	65
Stable Stochastic Finite Element Method, <i>Teja Melink, Jože Korelc</i>	73
Plitka bimetalna lupina v homogenem temperaturnem polju ob učinkovanju zunanjega sile, <i>Marko Jakomin, Franc Kosel</i>	81

Bending of the elastic beam, <i>George Mejak</i>	89
Effect of heating on fiber shrinkage, <i>Ivan Saprunov, Rostislav Simonyants, Igor Emri</i>	97
Analiza postkritičnega obnašanja delaminiranih prostorskih nosilcev z upoštevanjem kontakta, <i>Urban Rodman, Miran Saje, Igor Planinc, Dejan Zupan</i>	105
Primerjava med Reissnerjevo, Reddyjevo in Cheng-Wang-Shijevo teorijo zmerno debelih elastičnih plošč, <i>Milan Batista</i>	114
Primerjava valčne transformacije in metode mnogokratnih polov za reševanje integralskih enačb Poissonovega tipa, <i>Jure Ravnik, Leopold Škerget, Matjaž Hribaršek</i>	124
Research on bladeless impeller from open cell porous material, <i>Gašper Benedik, Brane Širok, Marko Hočevar, Aljoša Močnik</i>	132
Tokovni režim okoli mehurja v odvisnosti od premera mini-kanala, <i>Zlatko Rek, Iztok Žun</i>	140
Influence of rheological properties at two-dimensional modelling of debris flows, <i>Jošt Sodnik, Matjaž Četina, Matjaž Mikoš, None</i>	148
Jerk Dynamics Researches by Harmonic Balance Method, <i>Rudolf Pušenjak, Maks Oblak</i>	156
Prostorski nosilci in kvaternionska parametrizacija rotacij, <i>Eva Zupan, Miran Saje, Dejan Zupan</i>	164
Veliki premiki nelinearno elastičnih ravninskih konzol, ki so obremenjene sestavljenim obremenitvijo, <i>Matjaž Čeborn, Miha Brojan, Franc Kosel</i>	172
Optimizacija topologije z uporabo nivojske funkcije in projektnih elementov, <i>Marko Kegl, Boštjan Harl</i>	180
Določitev ekstremnih normalnih in ekstremnih strižnih napetosti, <i>Rado Flajs, Goran Turk, Stane Srpčić</i>	188
Analiza žebeljanega lesenega nosilca, <i>Urban Rodman, Miran Saje, Igor Planinc, Dejan Zupan</i>	196
Index avtorjev	202



Sledenje delcem v toku viskozne tekočine

Jure Ravnik¹, Matjaž Hriberšek in Janez Lupše

Particle tracking in viscous fluid flow

Povzetek. Predstavljena je numerična študija obnašanja delcev v gnani kotanji. Viskozen lamenaren tok je simuliran s programskim paketom, ki temelji na metodi robnih elementov. Razvit je algoritem za Lagrangeovo sledenje delcev. Fizikalni model vključuje težnost, vzgon, upor in prispevke zaradi tlačnega gradijenta ter dodane mase. Algoritem je bil uporabljen za simulacijo toka in obnašanja delcev v gnani kotanji. Raziskani so bili pogoji za vstop delcev različnih premerov in gostot v sekundarne vrtince v kotanji. Izvedena je bila parametrična študija. Ugotovljeno je bilo, da je velikost delca odločujoč faktor za vstop v sekundarne vrtince. Izvedena je bila primerjava z eksperimentalnimi podatki, ki je pokazala odlično ujemanje rezultatov numeričnih simulacij in eksperimentov.

Abstract. A numerical study of particle motion in a cubic lid driven cavity is presented. As a computational tool, a boundary element based flow solver with a Lagrangian particle tracking algorithm is derived. Flow simulations were performed using an in-house boundary element based 3D viscous flow solver. The Lagrangian particle tracking algorithm is capable of simulating dilute suspensions of particles in viscous flows taking into account gravity, buoyancy, drag, pressure gradient and added mass. The derived algorithm is used to simulate particle behaviour in a lid driven cavity flow. The main goal of the paper was to numerically simulate the flow behaviour of spheres of different densities and different diameters. The study of slightly buoyant and non-buoyant particles in a lid driven cavity was aimed at discovering cases when particles leave the primary vortex and enter into secondary vortices. A parametrical study of this phenomenon was preformed. The presented computational results show excellent agreement with experiments, confirming the accuracy of the developed computational method.

1 Uvod

Disperzne dvofazne tokove velikokrat srečujemo v okolju in v inženirskih sistemih, predvsem v procesnem inženirstvu. V okolju se navadno srečujemo z disperzijami trdnih ali tekočinskih

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

delcev v atmosferi ali z trdnimi, tekočinskimi ali plinastimi delci v hidrosferi. V procesnem inženirstvu uporabljamo disperzne tokove predvsem zaradi velike kontaktne površine med zvezno in disperzirano fazo, ki omogoča izboljšanje prenosa mase in toplotne med delci in tekočino. Po drugi strani se disperzirani večfazni sistemi pojavljujo tudi v transportnih sistemih in kemikalijskih reaktorjih. V reaktorjih v procesni industriji pogosto uporabljajo Rushtonova mešala, ki ustvarjajo značilno radialno tokovno polje. Poenostavitev takšnih sistemov je tok v gnani kotanji. Pojav recirkulacijskih območij v kotih kotanje lahko vpliva na kvaliteto izdelka, ker je v teh območjih prenos mase in toplotne manjši. Zato je pomembno, kdaj in kako delci različnih velikosti in gostot vstopajo v ta območja.

2 Simulacija toka tekočin

Laminaren viskozen tok smo simulirali z numeričnim algoritmom, ki so ga razvili Ravnik in sod. [4, 5]. Algoritem rešuje hitrostno vrtinčen zapis Navier-Stokesovih enačb z robno območno integralsko metodo. Uporabljamo kombinacijo več-območne in eno-območne metode robnih elementov. Simuliramo laminaren tok viskozne Newtonske tekočine. V hitrostno vrtinčni formulaciji je vrtinčnost $\vec{\omega}$ definirana kot rotor hitrosti $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$. Tako vrtinčno kot hitrostno polje sta solenoidni. Enačba kinematike toka

$$\nabla^2 \vec{u} + \vec{\nabla} \times \vec{\omega} = 0, \quad (1)$$

povezuje hitrostno in vrtinčno polje. Enačba prenosa vrtinčnosti, zapisana v brezdimenzijski obliki, je

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{\omega}, \quad (2)$$

kjer smo Reynoldsovo število označili z Re . Enačba (2) izenačuje advektivni prenos vrtinčnosti na levi strani z izvornimi členi na desni strani.

Sistem enačb (1) in (2) rešujemo v nelinearni zanki v treh korakih. V prvem koraku izračunamo robne vrednosti vrtinčnosti z reševanjem enačbe kinematike toka z eno-območno metodo robnih elementov. V drugem izračunamo notranje vrednosti hitrostnega polja z več-območno metodo robnih elementov. V zadnjem koraku rešimo enačbo prenosa vrtinčnosti za notranje vrednosti vrtinčnosti z več-območno metodo robnih elementov. Za rešitev sistema je potrebno predpisati znano hitrost ali njen odvod na robu območja. Robne vrednosti vrtinčnosti izračunamo implicitno, kar pomembno prispeva k natančnosti metode (Škerget in sod. [6]).

3 Lagrangevo sledenje delcev

Enačba gibanja delcev je podana z

$$\frac{d^2 \vec{r}'}{dt'^2} = \vec{a}'(\vec{v}', \vec{u}'), \quad (3)$$

kjer je \vec{r}' položaj delca in \vec{a}' njegov pospešek, ki je odvisen od hitrosti delca \vec{v}' in hitrosti tekočine na mestu delca \vec{u}' . Pospešek delca smo zapisali tako, kot sta predlagala Maxey in Riley [3]:

$$\frac{d\vec{v}'}{dt'} = \vec{g} - \frac{\rho}{\rho_p} \vec{g} + \frac{\vec{u}' - \vec{v}'}{\tau_p} + \frac{\rho}{\rho_p} \frac{D\vec{u}'}{Dt'} + \frac{\rho}{2\rho_p} \left(\frac{d\vec{u}'}{dt'} - \frac{d\vec{v}'}{dt'} \right), \quad (4)$$

kjer je $d/dt' = \partial/\partial t' + (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla})$ in $D/Dt' = \partial/\partial t' + (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla})$. ρ, v sta gostota in viskoznost tekočine. ρ_p, d_p, τ_p so gostota, premer in $\tau_p = \rho_p d_p^2 / \rho 18v$ karakteristični čas delca. Členi, ki so vključeni v enačbo, so težnost, vzgon, upor in prispevka zaradi tlačnega gradijenta ter dodane mase. Enačbo zapišemo v brezdimenzijski obliki z u_0 in L , ki sta karakteristična hitrost toka in karakteristična dimenzija problema - $\vec{u} = \vec{u}'/u_0$, $\vec{v} = \vec{v}'/u_0$, $t = t'u_0/L$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{A}{St} \{ \vec{v}_s + \vec{u} - \vec{v} \} + \frac{3}{2} R \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + R \{ (\vec{u} + \frac{1}{2} \vec{v}) \cdot \vec{\nabla} \} \vec{u}, \quad (5)$$

kjer je Stokesovo število definirano kot

$$St = \frac{\rho_p d_p^2 u_0}{\rho 18v L}, \quad (6)$$

hitrost posadanja pa je

$$\vec{v}_s = \frac{d_p^2}{18v u_0} \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right) \vec{g}. \quad (7)$$

Parametra R in A sta

$$R = \frac{\rho}{\rho_p + \frac{1}{2}\rho}, \quad A = \frac{\rho_p}{\rho_p + \frac{1}{2}\rho} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}R \left(1 + \frac{\rho}{2\rho_p} \right)}. \quad (8)$$

V primeru zelo lahkih delcev ($\rho_p \ll \rho$, mehurčki v tekočini) parametra R in A limitirata proti $R \rightarrow 2, A \rightarrow 0$. Za aerosol ($\rho_p \gg \rho$) sta parametra $R \rightarrow 0, A \rightarrow 1$, kar pomeni da sta prispevka tlačnega gradijenta in dodane mase zanemarljiva. Za delce, ki imajo gostoto enako kot tekočina ($\rho_p = \rho$), velja $R = A = 2/3$.

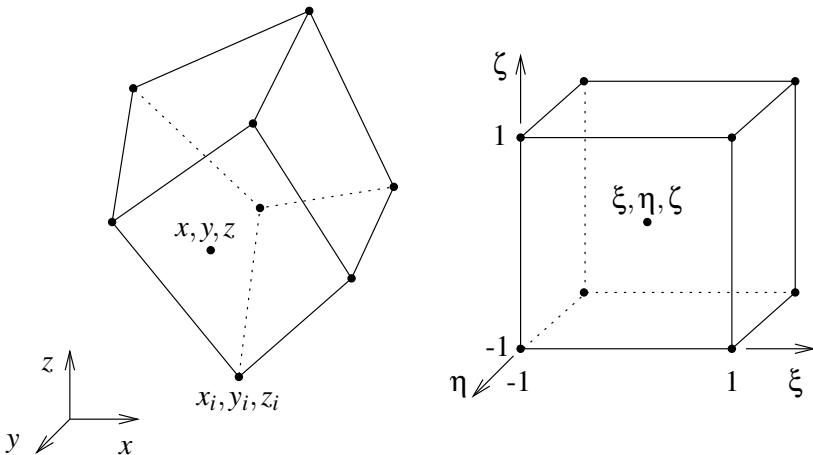
S pospeškom delca, ki je podan v enačbi (5), lahko rešimo gibalno enačbo delca (3) z uporabo metode Runge-Kutta četrtega reda. Rešujemo šest enačb hkrati:

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dv_x}{dt} = a_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dv_y}{dt} = a_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z, \quad \frac{dv_z}{dt} = a_z \quad (9)$$

Neznanke so položaj delca x, y, z in hitrost delca v_x, v_y, v_z . Začetni položaj delca in njegova začetna hitrost morata biti znana.

Za ovrednotenje pospeška delca potrebujemo hitrost tekočine \vec{u} na položaju delca. Simulacije toka smo izvajali na računski mreži z elementi v obliki heksaedrov. Prvi korak pri določanju hitrosti toka na položaju delca je iskanje elementa v katerem je delec. Uporabili smo metodo, ki so jo predlagali Marchioli in sod. [2]. Izračunamo skalarni produkt med normalo na vsako izmed ploskev elementa in radij vektorjem delca. Če so vsi produkti negativni, je delec zunanj elementa. Opisana metoda deluje zgolj za konveksne elemente.

Naslednji korak je interpolacija hitrosti na položaj delca. Obravnavajmo poljuben heksaeder in njegovo preslikavo v lokalni koordinatni sistem. (Slika 1).



Slika 1 : Element v računski mreži in njegova preslikava v lokalni koordinatni sistem

Točko znotraj elementa (x, y, z) lahko zapišemo v lokalnem koordinatnem sistemu (ξ, η, ζ) s pomočjo interpolacijskih funkcij $\Phi_i(\xi, \eta, \zeta) = f(1, \xi, \eta, \zeta, \xi\eta, \xi\zeta, \eta\zeta)$ kot

$$x(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 \Phi_i(\xi, \eta, \zeta) x_i, \quad (10)$$

$$y(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 \Phi_i(\xi, \eta, \zeta) y_i, \quad (11)$$

$$z(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 \Phi_i(\xi, \eta, \zeta) z_i. \quad (12)$$

Zanima nas ravno obratna transformacija. Na podlagi znanega položaja delca (x, y, z) bi radi izračunali koordinate (ξ, η, ζ) v lokalnem koordinatnem sistemu. Ko so (ξ, η, ζ) znani, lahko interpoliramo katerokoli polje, ki je rezultat simulacije toka na položaj delca (x, y, z) .

Analitične rešitve zgornjega sistema enačb za (ξ, η, ζ) ob znanih (x, y, z) ni mogoče najti. Sistem smo rešili numerično z Newton-Raphsonovo metodo. Metoda uporabi Taylorjev razvoj za zapis linearnega sistema enačb za popravke vseh neznank. Nato iterativno popravljamo začetni približek za (ξ, η, ζ) proti pravim vrednostim. Približno 100 iteracij je potrebnih za natančnost 10^{-6} . Ta del algoritma za sledenje delcev zahteva največ računskega časa.

Algoritem za sledenje lahko povzamemo v naslednjih točkah.

- Pred simulacijo preiščemo računsko mrežo in za vsak element izdelamo seznam sosednjih elementov. Ta korak bistveno pripomore k hitrosti iskanja elementa v katerem je delec, saj navadno v enem časovnem koraku delec nikoli ne preskoči več kot enega elementa.
- Za iskanje elementa računske mreže, v kateri je delec, uporabimo metodo skalarnih produktov. Najprej preverimo element v katerem je bil delec v prejšnjem časovnem koraku

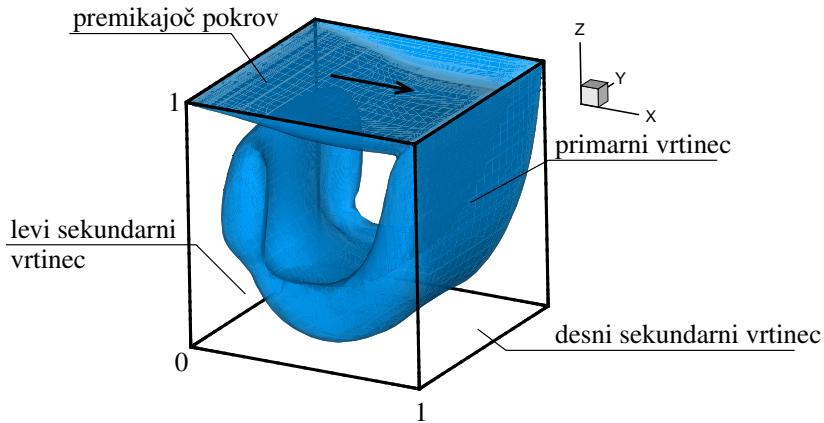
in nato sosednje elemente. Če je izbira časovnega korak prava, delec ne prepotuje več kot enega elementa v časovnem koraku.

- Uporabimo Newton-Raphsonovo metodo za izračun hitrosti tekočine na položaju delca.
- Uporabimo metodo Runge-Kutta četrtega reda, da premaknemo delec znotraj časovnega koraka.

4 Tok delcev v gnani kotanji

Raziskave obnašanja delcev v gnani kotanji so predmet intenzivnih raziskav. Kosinski in sod. [1] so numerično simulirali oblake prahu in pri tem upoštevali medsebojne interakcije delcev in vpliv delcev na tekočino. Tsorng in sod. [7] so obravnavali obnašanje makroskopskih sfer v 3D gnani kotanji. Izvajali so 2D PIV eksperimente in podali rezultate pri Reynoldsovih številih za tok $Re = 180$, $Re = 470$ in $Re = 860$.

V prispevku podajamo rezultate numerične simulacije toka tekočin in sledenja delcev, ki ustrezajo eksperimentom Tsorng in sod. [7]. Predvsem nas je zanimal pogoj pri katerem delci vstopijo v sekundarne vrtince v kotanji. Robni pogoj za delce ob trku s steno kotanje je bil elastičen odboj. Trk z ganim pokrovom pa je delce pospešil na hitrost pokrova.



Slika 2 : Tok v gnani kotanji. Kotanja je kocka. Pokrov pri $z = 1$ se premika v smeri osi x .

Obravnavali smo makroskopske delce s premeri med $d_p = 3\text{mm}$ in $d_p = 0.3\text{mm}$ v gnani kotanji s stranico $L = 10\text{cm}$. Gostota delcev je bila $\rho_p = 1210\text{kg/m}^3$. Gnano kotanje smo napolnili z dvema tekočinama viskoznosti $\nu = 17.3\text{mm}^2/\text{s}$. Prva je imela gostoto $\rho = 1210.605\text{kg/m}^3$ druga pa $\rho = 1209.153\text{kg/m}^3$. V prvi so bili delci malo lažji od tekočine, v drugi pa malo težji.

Tsorng in sod. [7] so eksperimentalno raziskali vstop delcev premera $d_p = 3\text{mm}$ v območje sekundarnih vrtincev. Ugotovili so, da je premer delcev odločajoč dejavnik za vstop v sekundarne vrtince, saj je tokovno polje takšno, da le ozek pas tokovnic ob zgornji steni in ob navpični steni vodita do sekundarnih vrtincev.

Mi smo vprašanje razširili na delce različnih premerov. V tokovna polja smo vstavili po 1000 delcev, ki so bili v začetku naključno porazdeljeni v kocki v sredini kotanje ($0.3 < x, y, z < 0.7$). Delcem premerov med 0.3mm in 2mm smo sledili po kotanji toliko časa, da so vsi naredili vsaj 10 obratov v glavnem vrtincu. Poti delcev smo zabeležili in analizirali kateri vstopijo v sekundarne vrtince in kateri ne. Razlikujemo med levim in desnim sekundarnim vrtincem (Slika 2). Rezultati so prikazani v preglednici 1.

Ugotovili smo, da lahko samo dovolj majhni delci vstopajo v oba sekundarna vrtinca. Mejna velikost je odvisna od Reynoldsovega števila. Večji delci lahko vstopajo samo v levi sekundarni vrtinec. Če premer še povečamo, vsi delci ostanejo ujeti v primarnem vrtincu. Razlika med lažjimi in težjimi delci se odraža predvsem v dejstvu, da se težji delci posedejo na dno kotanje. Ker sta sekundarna vrtinca na dnu kotanje, je razumljivo, da je mejni premer pri težjih delcih večji od mejnega premera pri lažjih delcih.

Slike 3, 4 in 5 prikazujejo porazdelitve delcev različnih premerov v kotanjah pri $Re = 130$, $Re = 470$ in $Re = 860$. Opazimo, da se delci majhnih premerov nahajajo po celotni kotanji, malo večjih ne najdemo v desnem sekundarnem vrtincu, največji pa so ujeti samo v primarnem vrtincu.

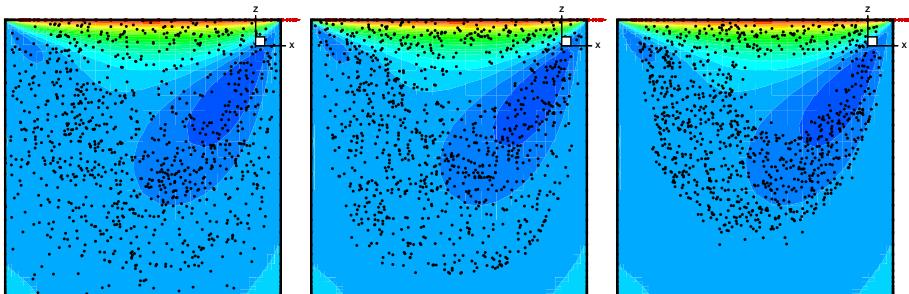
Tabela 1 : Vstop delcev v sekundarna vrtinca. (-) delci ne vstopijo v sekundarna vrtinca, (+) delci vstopijo v oba vrtinca, (l) delci vstopijo samo v levi vrtinec.

$d_p[\text{mm}]$	$Re = 130$		$Re = 470$		$Re = 860$	
	lažji	težji	lažji	težji	lažji	težji
0.3	-	-	+	+	+	+
0.5	-	-	+	+	+	+
0.75	-	1	+	+	+	+
1.0	-	1	1	1	+	+
1.25	-	1	1	1	1	1
1.5	-	1	1	1	1	1
2.0	-	1	-	1	-	-

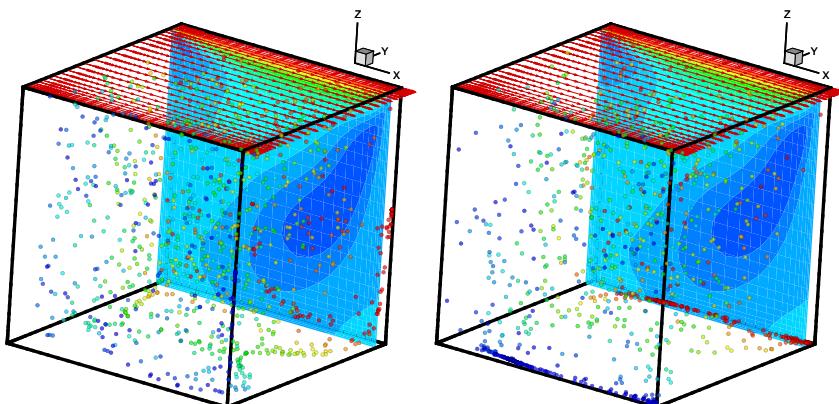
5 Zaključki

V članku smo predstavili algoritem za Lagrangeovo sledenje redkim suspenzijam delcev v viskoznem toku. Fizikalni model vključuje težnost, vzgon, upor in prispevke zaradi tlačnega gradiента in dodane mase. Gibalno enačbo za delec smo rešili z metodo Runge-Kutta. Interpolacijo hitrosti tekočine na položaj delca smo izvedli z reševanjem nelinearnega sistema enačb z Newton-Raphsonovo metodo. Tok tekočine smo simulirali z numeričnim algoritmom, ki temelji na reševanju Navier-Stokesovih enačb v hitrostno vrtinčnem zapisu z metodo robnih elementov.

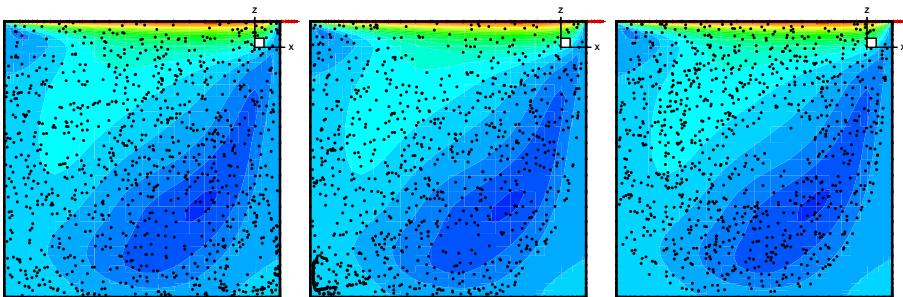
Algoritem smo uporabili za študijo obnašanja makroskopskih delcev v 10cm gnani kotanji. Tok v gnani kotanji ima tri-dimenzionalen značaj s primarnim vrtincem v sredini kotanje in sekundarnimi vrtinci ob robovih. Raziskali smo pogoje za vstop delcev v sekundarne vrtince. Obravnavali smo delce, ki imajo gostoto malo različno od gostote tekočine in premere do 3mm .



Slika 3 : Delci lažji od tekočine s premeri $d_p = 0.3\text{mm}$ (levo), $d_p = 1\text{mm}$ (sredina) in $d_p = 2\text{mm}$ (desno) pri $Re = 130$ prikazani po dolgem času na ravnini $x - z$. Noben izmed delcev ne vstopi v sekundarni vrtinec. Manjši delci so ujeti v celiem primarnem vrtincu, večje pa tok drži v kolobarju znotraj primarnega vrtinca. V ozadju so prikazane izolinije komponente hitrostnega polja u_x na ravnini $y = 0.94$.



Slika 4 : Delci lažji od tekočine (levo) in delci težji od tekočine (desno) $d_p = 1\text{mm}$ prikazani po dolgem času na ravnini $x - z$ pri $Re = 470$. Noben izmed delcev ne vstopi v sredino desnega sekundarnega vrtinca pri $x = 1$, $y = 0.5$, medtem ko delci vstopijo v oba kota pri $x = 1$. Barva delcev prikazuje y koordinato. V ozadju so prikazane izolinije komponente hitrostnega polja u_x na ravnini $y = 0.94$.



Slika 5 : Delci lažji od tekočine s premeri $d_p = 1\text{mm}$ (levo), $d_p = 1.5\text{mm}$ (sredina) and $d_p = 2\text{mm}$ (desno) pri $Re = 860$ prikazani po dolgem času na ravnini $x - z$. Majhni delci vstopijo v oba sekundarna vrtinca, srednji samo v levega, veliki pa v nobenega. V ozadju so prikazane izolinije komponente hitrostnega polja u_x na ravnini $y = 0.94$.

Ugotovili smo, da delci s premeri nad mejnim premerom ne vstopajo v sekundarna vrtinca. Mejni premer je odvisen od Reynoldsovega števila in znaša 0.75mm pri $Re = 470$ in 1.0mm pri $Re = 860$. Izvedena numerična analiza nam je tako omogočila globlji vpogled v obnašanje delcev v gnanih kotanjah.

Literatura

- [1] P. Kosinski, A. Kosinska in AC Hoffmann. Simulation of solid particles behaviour in a driven cavity flow. *Powder Technology*, 191:327–339, 2009.
- [2] C. Marchioli, V. Armenio in A. Soldati. Simple and accurate scheme for fluid velocity interpolation for Eulerian-Lagrangian computation of dispersed flows in 3D curvilinear grids. *Comput. & Fluids*, 36:1187–1198, 2007.
- [3] M.R. Maxey in J.J. Riley. Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow. *Phys. Fluids*, 26:883–889, 1983.
- [4] J. Ravnik, L. Škerget in Z. Žunič. Velocity-vorticity formulation for 3D natural convection in an inclined enclosure by BEM. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 51:4517–4527, 2008.
- [5] J. Ravnik, L. Škerget in Z. Žunič. Combined single domain and subdomain BEM for 3D laminar viscous flow. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 33:420–424, 2009.
- [6] L. Škerget, M. Hriberšek in Z. Žunič. Natural convection flows in complex cavities by BEM. *Int. J. Num. Meth. Heat & Fluid Fl.*, 13:720–735, 2003.
- [7] S. J. Tsorng, H. Capart, D.C. Lo, J.S. Lai in D.L. Young. Behaviour of macroscopic rigid spheres in lid-driven cavity flow. *Int. J. Multiphase Flow*, 34:76–101, 2008.



Algoritem za določitev vektorja hitrosti za anemometer z vročimi žičkami konstantne temperature

V. Šajn¹, M. Kotur² in F. Kosel³

Algorithm for velocity vector calculation for constant temperature hot-wire anemometer

Povzetek. V prispevku je predstavljen algoritem, ki na osnovi očitanih napetosti na večkanalnem anemometru z vročo žičko, določi vektor hitrosti obtekajočega se fluida. Zaradi nelinearnega odziva hot-wire anemometra na smer in velikost toka fluida okrog žice anemometra je inverzna funkcija nelinearna in ponuja več rešitev. Predstavljen algoritem med množico pravilnih rešitev izbere fizikalno pravilno.

Abstract. This document presents the algorithm, which based on measured voltages on multi-channel hot-wire, determines the fluid flow velocity vector. Because of hotwire nonlinear response on fluid flow direction and intensity inverse function is nonlinear and has several mathematically correct solutions. Presented algorithm elects physically correct solution from group of solutions.

1 Uvod

Anemometri z vročo žičko se intenzivno uporabljajo pri meritvi turbulentnih tokov ker podajajo hitrost zvezno v odvisnosti od časa, ter imajo velik frekvenčni pas delovanja. Pomanjkljivost teh naprav da z fizičnim vnosom v tok le tega popačimo, sonde so fizično občutljive ter je možna kontaminacija vroče žičke z delci v fluidu. Anemometer se nelinearno odziva na velikost hitrosti obtekajočega se fluida. Komponenta hitrosti fluida, ki je ortogonalna na vročo žičko ima prevladujoč vpliv na delovanje anemometra. Vpliv komponente hitrosti vzdolž žice za standardne izvedbe anemometrov žičko nima značilnega vpliva na njeno delovanje [4]. Iz predstavljenega je anemometer z vročo žičko uporaben za

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

² Univerzitet Banja Luka, Mašinski fakultet

³ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

merjenje velikosti hitrosti fluida ob pogoju da je zagotovljena ortogonalnost toka na tangentu vektorja žičke.

V preteklosti je bilo več poskusov da bi se z anemometrom z vročo žičko izmeril vektor hitrosti. Osnovni pristop je zasnovan na fizičnem spreminjanju kota vroče žičke v prostoru z namenom poiskati maksimalno vrednost [3]. Z dosega maksimalne vrednosti je dosežena ortogonalnost toka glede na žičko. S tem je določena le ravnina v kateri se nahaja vektor hitrosti. Za točno določitev vektorja hitrosti sta potrebni dve vroči žički z različnimi orientacijami v prostoru. Z ustrezeno rotacijo sonde okrog oseh normalnih na žički anemometra se doseže maksimalna vrednost in ugotovi smer toka fluida, vendar ne tudi usmerjenost. Delovanja anemometra z vročo žičko je zasnovano na odvodu energije topote žičke in fizikalno ni možno ugotoviti usmerjenost vektorja hitrosti fluida. Velikost hitrosti se določi na osnovi izhodne napetosti anemometra. Metoda je preprosta vendar potrebuje zahtevno mehansko napravo za ustrezeno rotacijo sonde, ki mora biti v toku fluida. Z omenjeno metodo ni možno meriti vektor hitrosti nestacionarnega toka fluida, tudi meritev dominantno stacionarnih tokov pa je nezanesljiva [7].

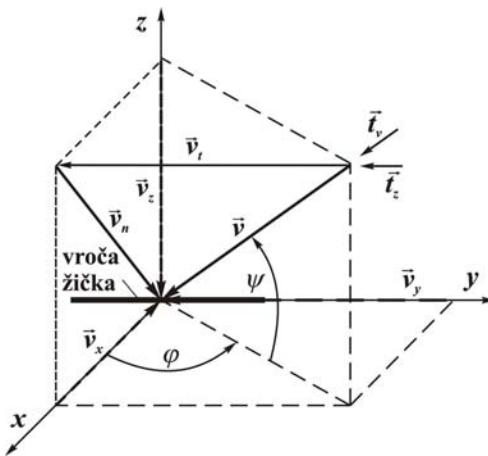
Drugi pristop bazira na večjem številu merilnikov z različno usmerjenimi žičkami [2]. Glede da je število neznank vektorja hitrosti fluida naj bi trije merilniki zadoščali za določitev vektorja hitrosti. Ker pa je napetost nelinearna funkcija hitrosti in kota fluida je možno dobiti več rešitev nelinearnega sistema enačb. Od teh sicer matematično točnih rešitev ni možno z zanesljivostjo izbrati fizikalno pravilno. V laboratoriju za nelinearno mehaniko je bil razvit merilnik vektorja toka fluida s tremi žičkami. Pri testiranju je ugotovljeno da ni možno zanesljivostjo dokazati da je izračunana rešitev sistema nelinearnih enačb tudi fizikalno pravilna. Zaradi omenjenih težav smo pristopili razvoju večkanalnega anemometra z vročo žičko konstantne temperature, ki je zmožen izbrati med množico rešitev sistema nelinearnih enačb fizikalno pravilno. V prispevku je predstavljen matematični in numerični algoritem za dokaz in izbiro fizikalno pravilne rešitve iz množice matematično točnih rešitev.

2 Osnovne enačbe delovanja anemometra

Termalni anemometer z vročo žičko deluje po principu odvoda topote s segrete žičke, ki je funkcija hitrosti toka fluida. Pojav je nelinearen in odvisen od vektorja hitrosti in fizikalnih lastnosti fluida ter geometrije in temperature vroče žičke. Pri meritvi vnašamo sondu v tok fluida in s tem motimo obtok. Kalibracija je zahtevna in so potrebne stalne kontrole pri meritvi. Značilna pomanjkljivost anemometrov z vročo žičko je da merijo le efektivno hitrost, ki večinoma predstavlja komponento velikosti hitrosti ortogonalne na žičko. Napetost na izhodu anemometra s konstantno temperaturo U je [5]:

$$U^2 = U_{v=0}^2 + b v_{eff}^n \quad (1)$$

kjer je v_{eff} efektivna hitrost fluida, ki povzroči odvod topote z vroče žičke. $U_{v=0}$ je napetost na vroči žički ob nični hitrosti okoliškega fluida. Je večinoma posledica naravne konvekcije okrog vroče žičke. Konstanta b je odvisna od materialnih in geometričnih lastnosti vroče žičke in lastnosti krmilne elektronike. Konstanta n je odvisna od mehanizma prisilne konvekcije toka ter je njena velikost v okolini števila 0.5.



Slika 1: Prostorski model toka fluida okrog vroče žičke.

Na sliki 1. grafično predstavljen prostorski model obtekanja toka fluida okrog žičke. Efektivno hitrost fluida dobimo z upoštevanjem normalne in tangencialne komponente toka glede na vektor tangente vroče žičke [4]:

$$v_{eff} = \sqrt{v_n^2 + (k_t v_t)^2} \quad (2)$$

kjer je v_t tangencialna komponenta vektorja hitrosti fluida. Dobimo jo z enačbo $v_t = v t_v \cdot t_z$, kjer je v velikost hitrosti fluida, t_v enotski vektor hitrosti fluida ter t_z enotski vektor tangente vroče žičke. Normalno komponento vektorja hitrosti fluida v_n dobimo z naslednjo enačbo:

$$v_n^2 = v^2 - v_t^2 \quad (3)$$

Konstanta k_t predstavlja doprinos tangencialne komponente hitrosti fluida na odvod topote z žičke. Za vitkost – razmerje med dolžino in premerom vroče žičke večje od 300 lahko privzamemo da je vrednost k_t zanemarljivo majhna [1]. Iz enačbe (2) sledi da je efektivna hitrost enaka normalni komponenti hitrosti toka fluida. Pri praktičnih izvedbah v Laboratoriju za nelinearno mehaniko izdelujemo sonde z vitkostjo razreda 500. S tem izpolnjujemo podane zahteve in lahko privzamemo enakost normalne komponente in efektivne hitrosti fluida. Z upoštevanjem enačb (2) in (3) lahko podamo povezavo med efektivno hitrostjo in vektorjem hitrosti:

$$v_{eff}^2 = v^2 \left(1 - (t_v \cdot t_z)^2 \right) \quad (4)$$

Za enoznačen izračun velikosti efektivne vrednosti hitrosti ter z uporabo enačbe (1) izhodne napetosti iz anemometra z vročo žičko je potrebno poznati velikost hitrosti, smer enotskega vektorja hitrosti in smer enotskega vektorja tangente vroče žičke anemometra.

3 Reševanje inverznega problema

Namen anemometra je določitev neznane komponente hitrosti toka fluida iz znanih napetosti U in geometrije vroče žičke. V tem primeru so v enačbi tri neznanke in z eno nelinearno enačbo (4) ni možna določitev vektorja hitrosti toka. V praksi se uporabljam anemometri s tremi žičkami. Za določitev treh neznank komponent vektorja hitrosti fluida rabimo tri vroče žičke ter dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} E_1 &\Rightarrow v_{eff1}^2 = v^2 \left(1 - (\mathbf{t}_v \cdot \mathbf{t}_{z1})^2 \right) \\ E_2 &\Rightarrow v_{eff2}^2 = v^2 \left(1 - (\mathbf{t}_v \cdot \mathbf{t}_{z2})^2 \right) \\ E_3 &\Rightarrow v_{eff3}^2 = v^2 \left(1 - (\mathbf{t}_v \cdot \mathbf{t}_{z3})^2 \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Kjer indeksi 1, 2 in 3 predstavljajo tangentne vektorje in efektivne hitrosti posamezne vroče žičke. Sistem enačb je nelinearen in v splošnem le numerično rešljiv. Kljub formiraju sistema treh enačb še vedno ni možno z zagotovostjo dobiti fizikalno pravilno rešitev, saj ima sistem treh nelinearnih enačb več matematično pravilnih rešitev [6].

S spremenjanjem začetnih pogojev pri numeričnem reševanju sistema enačb dobimo več medsebojno različnih matematično točnih rešitev, od katerih je le ena fizikalno pravilna. Iz omenjenega sistema enačb ni možno z zanesljivostjo ugotoviti katera rešitev je fizikalno pravilna. Enako so pokazali tudi testi meritnika vektorja hitrosti izvedeni v Nizkoturbulentnem vetrovniku Laboratorija za nelinearno mehaniko.

Za rešitev problema več matematično točnih rešitev nelinearnega sistema enačb vpeljemo še dodatno žičko in enačbo. Iz sistema štirih enačb tvorimo štiri podsisteme s tremi nelinearnimi enačbami:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} S_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} S_3 \\ E_4 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} S_4 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Vsek sitem enačb je linearne neodvisen od ostalih. Z spremenjanjem začetnih pogojev lahko vplivamo na konvergenco proti najbližji matematično točni rešitvi velikosti hitrosti in usmeritvi. Gleda do so štirje podsistemi enačb medsebojno linearne neodvisni bo fizikalno pravilna rešitev tista, ki za enake začetne pogoje pri vseh podsistemih enačb da enako matematično točno rešitev:

$$\begin{aligned} v_{S_1} &= v_{S_2} = v_{S_3} = v_{S_4} \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r} = \mathbf{r} = \mathbf{r} \\ t_{vS_1} &= t_{vS_2} = t_{vS_3} = t_{vS_4} \end{aligned} \quad (7)$$

Če za začetne vrednosti vnesemo trivialne vrednosti, lahko dobimo le najbližje matematično točne rešitve, katerih vrednosti se v splošnem medsebojno razlikujejo, saj vsak podsistem enačb ima več matematično točnih rešitev. Iz točnih rešitev je potrebno z ustreznim algoritmom izračunati novo vrednost začetnih pogojev, ki bo pripeljala do fizikalno pravilne rešitve.

3.1 Algoritem za iterativen izračun novega začetnega pogoja »Tri proti ena«

Pri predlaganem algoritmu izračuna novega začetnega pogoja izhajamo iz predpostavke da se rešitev, ki najbolj odstopa od povprečne vrednosti rešitev za posamezno prostostno stopnjo, zavrže kot fizikalno neustrezna. Največje odstopanje O_f izračunamo:

$$O_f = \max \{O_{f1} = |f_1 - f_s|; O_{f2} = |f_2 - f_s|; O_{f3} = |f_3 - f_s|; O_{f4} = |f_4 - f_s|\} \quad (8)$$

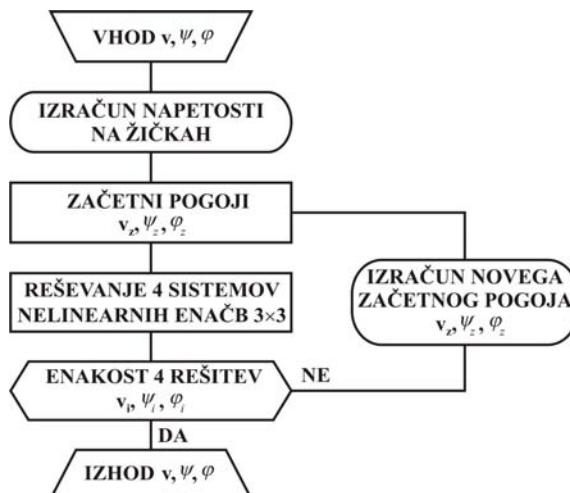
kjer $f_s = 1/4(f_1 + f_2 + f_3 + f_4)$ srednja vrednost rezultatov izračunov posamične prostostne stopnje vektorja hitrosti fluida in O_{fi} absolutna vrednost odstopanja od srednje vrednosti rešitve. Novo začetno vrednost za prostostno stopnjo vektorja hitrosti fluida f_n dobimo iz povprečne vrednosti preostalih treh rešitv sistema enačb:

$$f_n = \begin{cases} \frac{f_2 + f_3 + f_4}{3}; O_f = O_{f1}; \frac{f_3 + f_4 + f_1}{3}; O_f = O_{f2}; \\ \frac{f_4 + f_1 + f_2}{3}; O_f = O_{f3}; \frac{f_1 + f_2 + f_3}{3}; O_f = O_{f4} \end{cases} \quad (9)$$

Če novo nastale začetne pogoje uporabimo za izračun sistemov enačb dobimo nove matematično točne rešitve. Postopek ponavljamo dokler se razlika med začetnimi vrednostmi in rešitvami zmanjša na vrednost manjšo od dovoljene.

4 Test delovanja algoritma

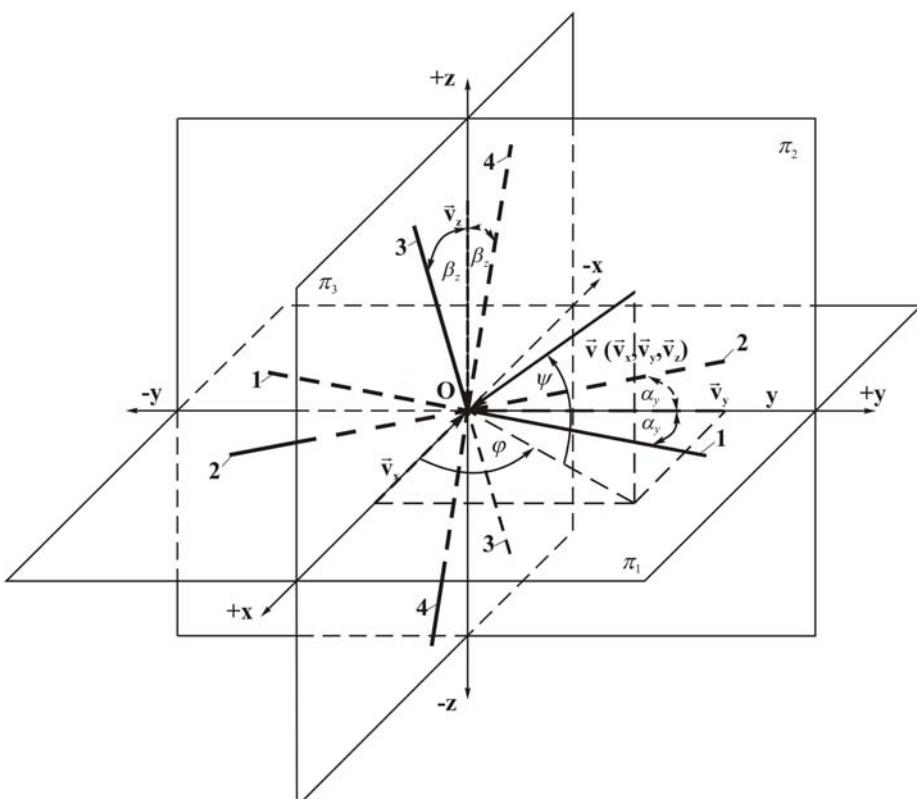
Za kontrolo praktične uporabe predstavljenega algoritma za iskanje fizikalno pravilne rešitve je bil izdelan program za testiranje algoritma. Algoritem programa je predstavljen na sliki 2.



Slika 2: Algoritem za test delovanja algoritma za iskanje fizikalno pravilne rešitve.

Algoritem je sestavljen iz dveh delov: podprogram za izračun napetosti na štirih žičkah glede na podane parametre toka in geometrijo anemometrov z vročo žičko ter podprogram za izračun hitrosti toka fluida glede na podane napetosti anemometra z vročimi žičkami.

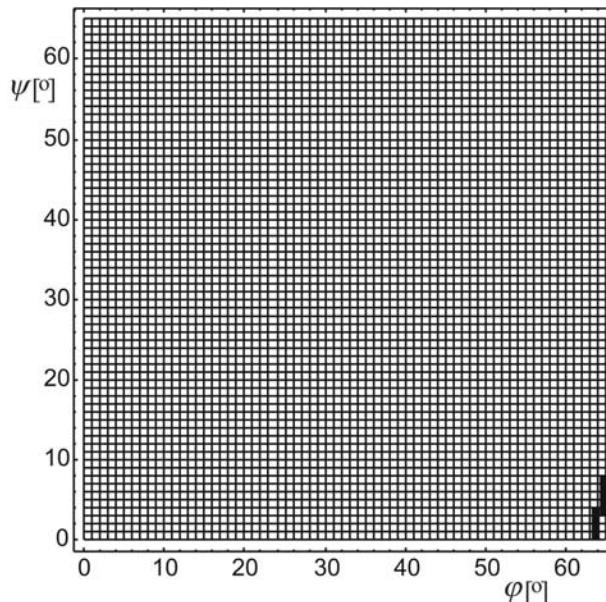
Na osnovi geometrije vročih žičk in izračunanih napetostih iz prvega podprograma tvorimo štiri sisteme nelinearnih enačb in jih rešujemo z Newtonovo metodo za numerično reševanje nelinearnih sistemov enačb. Ob upoštevanju trivialnih robnih pogojev izračunamo prve matematično točne rešitve. Z uporabo algoritma za izbiro začetnih pogojev tri proti ena izračunamo nove začetne pogoje. Kot pogoj konvergencije rešitve ugotavljamo odstopanje začetne vrednosti od izračunanih. V primeru da ni dosežena konvergenca ponovimo izračun.



Slika 3: Funkcionalna izvedba anemometra s štirimi vročimi žičkami za merjenje vektorja hitrosti toka fluida

Program smo izdelali v programskem okolju Mathematica. Za praktično dokaz delovanja algoritma smo izvedli simulacijo meritev vektorja toka fluida. Pri testu smo popisali vektor hitrosti toka v krogelnem koordinatnem sistemu z velikostjo toka v ter krogelnimi koti j in y . Za test je bila izbrana velikost hitrosti fluida 10 m/s, kota j in y sta bila v območju med 0° in $+65^\circ$ z inkrementalnim korakom 1° . Z dodatnimi testi je ugotovljeno da, če algoritem deluje za pozitivne vrednosti krogelnih kotov j in y , deluje tudi za negativne ali kombinacijo pozitivnih in negativnih kotov.

Merilnik vektorja hitrosti je predstavljen na sliki 3. Je sestavljen iz dveh paric vročih žičk 1 in 2 ter 3 in 4. Prva parica je v ravninah x - y in druga v ravnini x - z . Vsaka parica vročih žičk je X konfiguraciji kjer vroči žički medsebojno oklepata kot $2a_y$ v ravnini x - y ter $2b_z$ v ravnini x - z . Os x je simetrijska os merilnika. Na sliki 4 je grafično predstavljen rezultat testnega delovanja algoritma. Je prestavljena matrika 4225 polj rezultatov izračuna.



Slika 4: Polje rezultatov testiranja delovanja algoritma za izračun vektorja hitrosti fluida.

Po horizontalni osi spremojemo kot j in po vertikalni y . Temna polja so tista ker se je vrednost rezultatov razlikovala za več kot $3 \cdot 10^{-4}$ od vnesenega, pri svetlih je relativna razlika med vhodnimi in izhodnimi koti bila manjša $3 \cdot 10^{-4}$. Z omejitvijo števila numeričnih iteracij na 10 je algoritem deloval pravilno za večino izbranega polja delovanja instrumenta. Z večanjem števila dovoljenih globalnih iteracij nismo uspeli povečati polja pravilnega delovanja merilnika. Ugotavljamo da algoritem deluje pravilno če delovno območje merilne naprave omejimo v območju $|j| < 63^\circ$ in $|y| < 63^\circ$.

Čeprav se je program izvajal v interpreterskem načinu je dosegal hitrost izračuna vektorja hitrosti fluida tudi do 20 simuliranih meritev na sekundo. Z razvojem namenske aplikacije ter napredkom računalniške moči je realno pričakovati da bo lahko namensko razvit program simultano obdelovala rezultate meritev z bistveno višjo frekvenco. Za obdelavo meritev z večjo frekvenco vzorčenja še vedno obstaja možnost paketnega zajema do nekaj 100 vzorcev. Temu pa sledi obdelava podatkov. Za zelo visoke frekvence in zahteve po neprekinjenem sledenju toka fluida je še vedno možen celoten zajem meritev v spomin računalnika in na to naknadna obdelava podatkov.

5 Sklep

V prispevku je predstavljen algoritem za izračun vektorja hitrosti fluida na osnovi na meritev anemometra s štirimi vročimi žičkami konstantne temperature. Zaradi nelinearnih enačb meritev s tremi vročimi žičkami ne zadošča za enoznačen izračun vektorja hitrosti fluida. Kot rešitev sistema nelinearnih enačb dobimo večje število sicer matematično pravilnih vendar fizikalno nesprejemljivih rešitev. Zato smo vpeljali še dodatno četrto žičko in s tem dodali v sistem četrto enačbo. Iz tega sistema smo razvili štiri linearne neodvisne podsisteme s tremi enačbami. Rezultati podsistemov enačb naj bi bili enaki ker računajo enak tok fluida. Z uvedbo iterativnega algoritma tri proti ena za izbiro začetnih pogojev smo lahko ugotovili fizikalno pravilna rešitev iz množice rešitev.

Večina današnjih anemometrov z vročo žičko, ki so namenjeni za merjenje vektorja hitrosti stacionarnega toka fluida, je namenjena merjenju tokov z dominantno smerjo in majhnimi fluktacijami okrog srednje vrednosti ali pa se sonda rotira v cilju iskanja maksimalne vrednosti izhodne napetosti anemometra [7]. Predstavljen algoritem, ki smo ga uporabili za izračun vektorja hitrosti na anemometru s štirimi žičkami, omogoča večje območje meritev kota vektorja hitrosti fluida brez potrebe po fizični rotaciji anemometra. Možno je tudi merjenje nestacionarnih tokov v okviru zmogljivosti anemometra.

Pomanjkljivost naprave vidimo v zelo zahtevni izvedbi sonde anemometra s štirim vročimi žičkami ter v majhni prostorski ločljivosti v primerjavami z Laser Doppler Anemometrom (LDA). Ob tem je treba upoštevati da finančni stroški nabave in uporabe anemometra s štirimi žičkami ne bodo dosegali 10% stroškov sodobnega LDA 3D merilnega sistema ter da je naprava namenjena tudi za delo na terenu kar je zelo težko trditi za sodoben 3D LDA merilni sistem. Algoritem je v fazi implementacije v 3D merilni sistem.

Literatura

- [1] F. H. Champagne, *Turbulence Measurements with Inclined Hot Wires*, Rep. 103, Boeing Scientific Research Laboratories, Flight Science Laboratory, 1965.
- [2] G. Fabris, *Probe and Method for Simultaneous Measurement of »True« Instantaneous Temperature and Three Velocity Components in Turbulent Flow*, Rev. Sci. Instrum., 49, 654—664, 1978.
- [3] H. Fujita and L.S.G. Kovasznay, *Measurement of Reynolds stress by a Single Rotated Hot-Wire Anemometer*, Rev. Sci. Instrum., 39, 1351—1355 1968.
- [4] R. J. Goldstein, *Fluid Mechanics Measurements*, Taylor and Francis, 1996.
- [5] L. V. King, *On the Convection of Heat from Small Cylinders in Stream of Fluid: Determination of the Convection Constants of Small Platinum Wires, with Application to Hot-Wire Anemometry*, Proc. R Soc. London, 90, 563—570, 1914.
- [6] I. C. Lekakis, R. J. Adrian and B. G. Jones, *Measurements of Velocity Vectors with Orthogonal and Non-Orthogonal Triple-Sensor Probes*, Exp. Fluids, 7, 228—240, 1989
- [7] P. K. Maciejewski and R.J. Moffat, *Interpreting Orthogonal Triple-Wire Data from Very High Turbulence Flows*, J. Fluid Eng., 116, 463—468, 1994.



Modeliranje turbulentnega toka v porozni snovi

J. Kramer¹, R. Jecl¹, L. Škerget²

Modeling of turbulent flow in porous media

Povzetek. V prispevku je predstavljen pristop k modeliranju turbulentnega toka v porozni snovi. Matematični model temelji na uporabi klasičnih Navier-Stokesovih enačb za čisto tekočino, ki so v osnovi zapisane na mikroskopskem nivoju. V primeru obravnavanja turbulence v porozni snovi je potrebno posebej modelirati turbulenco (časovno nihanje spremenljivk) ter transportne pojave v porozni snovi (prostorsko spremenjanje). Vodilne enačbe se tako časovno in prostorsko povprečijo, pri čemer se izkaže, da različen vrstni red povprečenja vodi do drugačnih modelov. Za numerično reševanje tovrstnih problemov bo uporabljena Robno Območna Integralska Metoda (ROIM) zato so predstavljene njene osnovne značilnosti.

Abstract. In the present paper a methodology for developing turbulence model in porous media is presented. The mathematical model bases on the classical Navier-Stokes equations for pure fluid flow, which are generally written on the microscopic level. To consider turbulence in porous media first modeling of turbulence (time variation) and then modeling of transport phenomena in porous media (space variation) has to be performed. The time averaging and space averaging have to be applied to the governing equations, where different averaging order lead to distinct sets of turbulence equations. For the numerical solution of the obtained set of equations the Boundary Domain Integral Method (BDIM) will be used which is also presented in the paper.

1 Uvod

Kljub velikemu razvoju znanosti na področju mehanike tekočin, je turbulentni tok v porozni snovi še vedno slabo raziskan in pretežno ostaja nerešen problem. Porozni materiali, ki jih srečujemo v inženirski praksi imajo ponavadi zelo majhne pore in majhne vrednosti prepustnosti, zaradi česar je prevladujoč režim toka tekočine v teh snoveh laminaren. Pa vendar, lahko pogosto najdemo primere toka tekočine v porozni snovi, kjer se pojavi turbulenten režim. Problematika sega predvsem na področja, kot so procesno strojništvo, termika, materiali, kemija,

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo

² Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

okoljevarstvo.

Eden izmed praktičnih primerov je npr. simulacija gibanja zračnih mas skozi gozdove. Gre za izrazito turbulenten režim gibanja zraka, kjer se gosto posajena drevesa modelirajo kot porozna struktura. Tovrstna simulacija služi predvsem za predvidevanje razširjevanja semen različnih rastlin, kot tudi za omejevanje širjenja gozdnih požarov.

Zelo pomembna aplikacija se nanaša na procese strjevanja in taljenja zlitin, kjer je značilen hkratni pojav večih različnih faz; trdne, vmesne, t.i. penaste in tekoče faze. Kvaliteta končnega produkta močno zavisi od režima toka tekoče faze, ki je v večini primerov turbulenten ter transportnih procesov znotraj vmesne oz. penaste faze, ki jo lahko modeliramo kot porozno snov. Pravilno zastavljen model turbulence v porozni snovi je tako ključnega pomena.

Za razlikovanje različnih režimov toka tekočine v porozni snovi služi porozno Reynoldsovo število Re_p , na podlagi katerega so v literaturi definirani različni režimi toka tekočine [1]:

- a) Darcyjev režim ($Re_p < 1$),
- b) Forchheimerjev režim ($1 \sim 10 < Re_p < 150$),
- c) post-Forchheimerjev režim, nestacionaren laminaren tok ($150 < Re_p < 300$),
- d) polno razvit turbulenten tok ($Re_p > 300$).

Za vrednosti $Re_p < 150$, t., i. Darcyjev režim, se tok tekočine po porozni snovi modelira na osnovi klasičnih enačb za tok čiste tekočine, ki se povprečijo preko ustrezno izbranega reprezentativnega elementarnega volumna (REV). Tako se izgubijo podatki o dogajanju znotraj por oziroma REV, rezultati pa so izvrednoteni na globalnem nivoju. Za visoke vrednosti Reynoldsovih števil ($Re_p > 300$), turbulenten tok, lahko v literaturi najdemo različne turbulentne modele, ki so v splošnem razviti po dveh različnih postopkih. V prvem primeru [2], [3] se vodilne enačbe najprej volumsko povprečijo, nato sledi še časovno povprečenje. Takšen model opiše turbulentco na makroskopskem nivoju, pri čemer pa ne poda nobene informacije o dogajanju znotraj por. V drugem primeru je vrstni red povprečenja obraten; časovno povprečene enačbe se v naslednjem koraku še volumsko povprečijo [4], [5]. Oba postopka privedeta do različnih vodilnih enačb in posledično tudi do različnih zaključkov.

V zadnjem času so se začeli pojavljati modeli, kjer avtorji dokazujojo, da ob primernih predpostavkah, kot je npr. popolnoma zasičena in toga porozna snov, vrstni red povprečenja postane nepomemben. To so t. i. modeli dvojne dekompozicije (double-decomposition method), ki so objavljeni v [6].

Večina objavljenih raziskav, ki jih lahko najdemo v literaturi na tematiko turbulentnega toka v porozni snovi, se navezuje na izpeljavo ustreznega matematičnega modela, medtem ko je zelo malo študij, ki hkrati vsebujejo tudi rezultate numeričnih izračunov. V tem prispevku je predstavljen pristop k modeliranju turbulence v porozni snovi povzet po že objavljenih študijah, ki jih lahko najdemo v dostopni literaturi.

V drugem delu je predstavljena robno območna integralska metoda, ki bo nadgrajena za primer reševanja turbulentnega toka v porozno snovi. Metoda se je že izkazala kot zelo učinkovita za reševanje problemov klasične dinamike tekočin [7], kot tudi transportnih pojavov v porozni snovi [8], [9].

2 Matematični model

Osnovni matematični model, ki je izhodišče za izpeljavo turbulentnega toka tekočine ter v nadaljevanju toka tekočine v porozni snovi oziroma turbulentnega toka v porozni snovi, temelji na enačbah, zapisanih za tok čiste tekočine v obliki Navier-Stokesovih enačb, ki so podane kot ohranitveni zakoni za maso, gibalno količino, energijo in snov:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

$$\rho_o \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \quad (2)$$

$$\rho_o c_{po} \frac{DT}{Dt} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + S_T, \quad (3)$$

$$\frac{DC}{Dt} = -\frac{\partial j_j}{\partial x_j} + S_C. \quad (4)$$

Enačbe so zapisane za kartezijev koordinatni sistem x_i , za $i = 1, 2, 3$, funkcije v posamezni enačbi pa predstavljajo: $v_i(r_j, t)$ vektor hitrostnega polja, $p(r_j, t)$ skalarno tlačno polje, $T(r_j, t)$ skalarno temperaturno polje ter $C(r_j, t)$ skalarno koncentracijsko polje. ρ_o in c_{po} sta gostota in specifična topota pri konstantnem tlaku, diferencialni operator $D(\cdot)/Dt = \partial(\cdot)/\partial t + v_k \partial(\cdot)/\partial x_k$ pa predstavlja Stokesov snovski odvod. ψ je vektor telesnih sil podan z izrazom $\psi = -g_j r_j$, kjer je g_i vektor gravitacijskega pospeška, r_i pa krajevni vektor. Člena S_T in S_C v energijski in snovski enačbi predstavlja člen toplotnih oziroma snovskih izvorov ter ponorov. Ohranitvene enačbe vsebujejo še vektor toplotnega toka q_i v energijski enačbi, vektor snovskega toka j_j v enačbi snovi ter napetostni tenzor σ_{ij} v gibalni enačbi, ki se lahko zapiše kot vsota izotropne normalne in deviatorične napetostne komponente: $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}$, kjer je p tlak, τ_{ij} deviatorični napetostni tenzor, δ_{ij} pa Kröneckerjev delta simbol. Gibalna in energijska enačba se lahko zapišeta v obliki:

$$\rho_o \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i, \quad (5)$$

$$\rho_o c_{po} \frac{DT}{Dt} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + S_T. \quad (6)$$

V energijski enačbi se pojavi člen Rayleighove viskozne disipacijske funkcije, $\Phi = \tau_{ij} \partial v_i / \partial x_j$, ki podaja koliko mehanske energije se pretvori v toplotno, kar je potrebno upoštevati predvsem pri tekočinah z veliko vrednostjo dinamične viskoznosti.

Zapisane enačbe predstavljajo odprt sistem parcialnih diferencialnih enačb, ki se rešijo z upoštevanjem ustreznih reoloških modelov, enačb stanja ter robnih oziroma začetnih pogojev.

2.1 Povprečenje vodilnih enačb

2.1.1 Časovno povprečenje

V primeru obravnavanja turbulentnega toka je potrebno opisati časovno nihanje spremenljivk. Najpogostejsa oblika povprečenja je z uporabo Reynoldsove dekompozicije, kjer se vrednost

spremenljivk razdeli na časovno povprečeno vrednost in oscilirajoč del. Časovno povprečenje poljubne spremenljivke f je podano z izrazom:

$$\bar{f} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f dt, \quad (7)$$

kjer je Δt integracijski časovni interval. Spremenljivko f lahko zapišemo kot vsoto časovno povprečene vrednosti \bar{f} in spreminjače komponente f' kot:

$$f = \bar{f} + f', \quad (8)$$

pri čemer velja, da je povprečje spreminjače komponente enako nič, $\bar{f}' = 0$. Če prikazan postopek časovnega povprečenja uporabimo na zgoraj zapisanih enačbah za tok tekočine, sledi naslednji sistem:

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (9)$$

$$\rho_o \frac{D\bar{v}_i}{Dt} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} + \bar{\rho} g_i, \quad (10)$$

$$c_o \frac{D\bar{T}}{Dt} = -\frac{\partial \bar{q}_j}{\partial x_j} + \bar{S}_T, \quad (11)$$

$$\frac{D\bar{C}}{Dt} = -\frac{\partial \bar{j}_j}{\partial x_j} + \bar{S}_C. \quad (12)$$

Funkcije \bar{v}_i , \bar{p} , \bar{T} in \bar{C} v zgornjih enačbah so srednje vrednosti hitrosti, tlaka, temperature in koncentracije, $\bar{\rho} g_i$ je srednja vrednost vektorja telesnih sil, $\bar{\rho}$ srednja vrednost gostote, g_i pa gravitacijski pospešek. Časovno povprečeni napetostni tenzor $\bar{\tau}_{ij}$, vektor topotnega toka \bar{q}_j ter vektor snovskega toka \bar{j}_j se lahko zapišejo kot vsota molekularnega difuzijskega toka za časovno povprečene vrednosti in turbulentnega toka kot:

$$\bar{\tau}_{ij} = -2\eta_o \bar{\epsilon}_{ij} + \rho_o \bar{v}'_i \bar{v}'_j, \quad (13)$$

$$\bar{q}_j = -\lambda_o \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + c_o \bar{T}' \bar{v}'_j, \quad (14)$$

$$\bar{j}_j = -D_o \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_j} + \bar{C}' \bar{v}'_j, \quad (15)$$

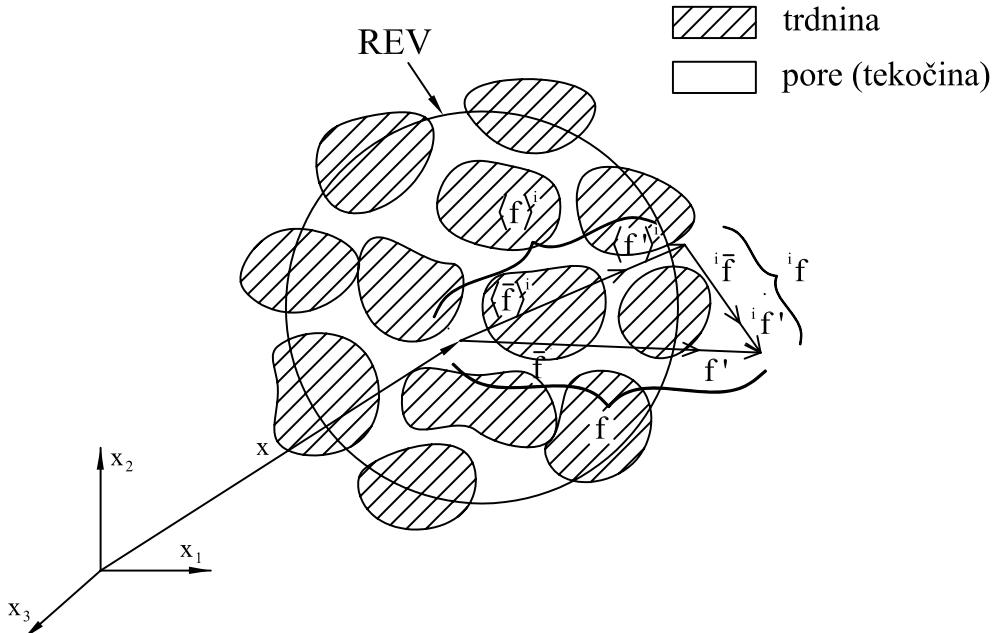
kjer je $\bar{\epsilon}_{ij}$ simetrični del časovno povprečenega hitrostnega gradiента:

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (16)$$

Enačbe se kot posledica razdelitve spremenljivk razdelijo v dva dela, kjer v prvem delu ostanjo osnovni členi splošne prenosne enačbe (akumulacija, konvekcija, difuzija, izvori), za razrešitev drugega, spreminjače dela pa je potrebno uporabiti posebne modele. V gibalni enačbi je to člen Reynoldsovih oz. turbulentnih napetosti $\rho_o \bar{v}'_i \bar{v}'_j$, v enačbi energije člen vektorja gostote turbulentnega topotnega toka $c_o \bar{T}' \bar{v}'_j$ ter v enačbi snovi člen vektorja gostote turbulentnega snovskega toka $\bar{C}' \bar{v}'_j$. Za izračun teh členov so potrebne dodatne zvezne oziroma turbulentni modeli. Za primere dinamike tekočin se najpogosteje uporablajo dvoenačbeni modeli ($k - \epsilon$ model), model Reynoldsovih napetosti ter model velikih vrtljev.

2.1.2 Volumsko povprečenje

Za obravnavanje toka tekočine po porozni snovi je potrebno vodilne enačbe najprej zapisati na makroskopskem nivoju. Vodilne enačbe se povprečijo preko reprezentativnega elementarnega volumna upoštevajoč dejstvo, da je samo en del tega volumna, ki je izražen s poroznostjo namenjen za tok tekočine. Poroznost je definirana kot razmerje med deležem por in celotnim



Slika 1 : Reprezentativni elementarni volumen (REV), notranje povprečje, prostorsko in časovno spreminjanje [1].

volumnom: $\phi = V_f/V$. Za poljubno funkcijo f velja, da je njeno notranje povprečje $\langle f \rangle^i$ z volumskim povprečjem $\langle f \rangle^V$ povezano kot:

$$\langle f \rangle^V = \phi \langle f \rangle^i ; \quad \langle f \rangle^i = \frac{1}{V_f} \int_{V_f} f dV , \quad \langle f \rangle^V = \frac{1}{V} \int_{V_f} f dV . \quad (17)$$

2.1.3 Posebi primeri

Iz zgoraj prikazanih primerov volumskega in časovnega povprečja poljubne spremenljivke f se lahko zapiše časovno povprečje volumsko povprečene spremenljivke f kot:

$$\overline{\langle f \rangle^V} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{1}{V} \int_{V_f} f dV \right] , \quad (18)$$

oziroma volumsko povprečenje časovnega povprečja:

$$\langle \bar{f} \rangle^V = \frac{1}{V} \int_{V_f} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f dt \right] dV . \quad (19)$$

Če predpostavimo togo porozno snov, je volumen tekočine odvisen samo od krajevne spremenljivke. Nadalje lahko predpostavimo, da je časovni interval Δt , ki je izbran za časovno povprečenje enak za vse reprezentativne elementarne volumne. V tem primeru volumsko povprečenje sovpada s časovnim, saj sta obe področji integracije v enačbah (18) in (19) neodvisni druga od druge. Ob teh predpostavkah vrstni red integracije ni pomemben in velja:

$$\overline{\langle f \rangle}^V = \langle \bar{f} \rangle^V \quad ; \quad \overline{\langle f \rangle}^i = \langle \bar{f} \rangle^i \quad (20)$$

3 Numerična metoda

Sistem parcialnih diferencialnih enačb zapisan za problem turbulentnega toka skozi porozno snov bo rešen z uporabo robno območne integralske metode. Metoda se je že razvita za različne primere prenosnih pojavov po porozni snovi [8], [9], pri čemer so rezultati primerljivi s tistimi, dobljenimi z uporabo alternativnih metod (metoda končnih volumnov, metoda končnih elementov, metoda končnih razlik). Osnovni princip robno območne integralske metode je bil že večkrat predstavljen na srečanju Kuhljevi dnevi, zato so v nadaljevanu povzete samo ključne značilnosti.

Bistvo metode je pretvorba parcialnih diferencialnih enačb v robno območne integralske enačbe. Pred tem je potrebno vse vodilne enačbe (časovno in volumsko povprečene enačbe (1), (2), (3), (4)) transformirati z uporabo hitrostno-vrtinčne formulacije, kar se stori z vpeljavo vektorja vrtinčnosti ω_i , ki je po definiciji rotor hitrostnega polja $\omega_i = e_{ijk} \partial v_k / \partial x_j$. Posledično se numerična shema razdeli na kinematični in kinetični del, kjer prvega predstavlja hitrostna enačba, drugega pa transportne enačbe vrtinčnosti, energije in snovi. Ključna lastnost in prednost robno območne integralske metode je uporaba Greenovih osnovnih rešitev kot utežnih funkcij. Ker osnovne rešitve zajemajo le linearne transportni problem, je zelo pomembna ustrezna izbira linearnega diferencialnega operatorja:

$$\mathcal{L}[\cdot] = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (21)$$

ter zapis vseh ohranitvenih zakonov v obliko:

$$\mathcal{L}[u] + b = 0, \quad (22)$$

kjer je u poljubna skalarna ali vektorska funkcija (hitrost, vrtinčnost, temperatura, koncentracija), b pa je člen telesnih sil.

Vse vodilne enačbe za hitrost, vrtinčnost, temperaturo in koncentracijo lahko splošno zapišemo v obliki nehomogene nelinearne parabolične parcialne diferencialne enačbe kot:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(a \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v_j u}{\partial x_j} + I_u = 0. \quad (23)$$

kjer je a difuzivnost, definirana skladno z ustreznim ohranitvenim zakonom, v_j lokalno solenoidno hitrostno polje ter I_u izvorni člen. Enačba se razdeli na linearne in nelinearne del, če snovsko lastnost razdelimo na konstanten in spremenljiv del: $a = \bar{a} + a'$. Ker osnovna rešitev obstaja samo za linearno difuzivno-konvektivno parcialno diferencialno enačbo s konstantnimi koeficienti, se pred izpeljavo splošnega integralskega zapisa tudi hitrostno polje razdeli na konstanten

in spremenljiv del: $v_j = \bar{v}_j + v'_j$, kjer je \bar{v}_j konstantna, dominantna hitrost v določenem področju, v'_j pa spremenljiv ostanek. Časovni odvod se aproksimira z uporabo metode končnih razlik kot:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_F - u_{F-1}}{\Delta t}, \quad (24)$$

kjer je Δt časovni korak $\Delta t = t_F - t_{F-1}$. Sledi enačba:

$$\bar{a} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j} - \bar{v}_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{1}{\Delta t} u + b = 0, \quad (25)$$

kjer je b nehomogeni člen, ki vsebuje nelinearni difuzivni (turbulentni) člen, konvekcijo zaradi spremenljivega dela hitrosti, začetni pogoj in člen izvorov:

$$b = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a' \frac{\partial u}{\partial x_j} - v'_j u \right) + \frac{1}{\Delta t} u_{F-1} + I_u. \quad (26)$$

Ustrezna integralska enačba se izpelje z uporabo metode utežnih ostankov, ki je splošna metoda aproksimativnega reševanja. Napake, ki nastanejo po celotnem računskem območju se minimizirajo z ustrezno utežno funkcijo, za kar se vzame osnovna rešitev u^* , ki je znana Greenova funkcija.

Splošna integralska enačba je oblike:

$$c(\xi) u(\xi) + \bar{a} \int_{\Gamma} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \left(\bar{a} \frac{\partial u}{\partial n} - u \bar{v}_n \right) u^* d\Gamma + \int_{\Omega} b u^* d\Omega, \quad (27)$$

kjer je $c(\xi)$ geometrijski koeficient, ki je odvisen od lege izvorne točke. Po opisanem postopku se izpeljejo integralske enačbe za povprečno hitrost, vrtinčnost, temperaturo ter koncentracijo snovi.

Po zapisu ustreznih integralskih enačb sledi diskretizacija računskega roba kot tudi območja ter zapis končnega diskretnega sistema enačb. Ker so v integralskih enačbah prisotni tako robni kot tudi območni integrali je potrebno diskretizirati tako rob kot tudi celotno območje problema. S tem se nekatere prednosti metode robnih elementov izgubijo, pa vendar se ohranijo prednosti, kot so natančnost rezultatov, stabilnost pri obravnavanju prehodnih pojavov, ločeno obravnavanje fizikalno različnih pojavov.

Diskretiziran sistem enačb se rešuje z uporabo programskega paketa BEEAS (Boundary Element Engineering Analysis System), ki je bil razvit na Fakulteti za strojništvo Univerze v Mariboru za reševanje klasičnih problemov dinamike tekočin in je že bil uspešno nadgrajen za obravnavanje toka tekočine v porozni snovi.

4 Zaključki

Predstavljen je matematični model za modeliranje turbulentnega toka v porozni snovi ter numerični postopek za reševanje tega problema. Vodilne enačbe temeljijo na klasičnih Navier-Stokesovih enačbah zapisanih za tok čiste tekočine, ki se morajo za primer obravnavanja turbulence v porozni snovi časovno in prostorsko povprečiti. Izviren pristop k problemu je reševanje

z uporabo robno območne integralske metode, ki se v zadnjih letih postavlja ob bok ostalim alternativnim aproksimacijskim pri čemer se odlikuje v številnih prednostih. Ker so raziskave v začetni fazi, v prispevku še ni predstavljenih konkretnih rezultatov izračuna, cilj pa je model čim bolj približati realnim problemom inženirske prakse, ter rešiti čim več različnih primerov, saj so rezultati na to tematiko, ki so dostopni v literaturi zelo omejeni.

Zahvala

Prispevek avtorice J. Kramer je del raziskovalnega projekta Z2-2035, ki ga finančno podpira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije.

Literatura

- [1] J. L. Lage, M. J. S. de Lemos in D. A. Nield *Modeling turbulence in porous media*, In *Transport phenomena in porous media II*, ed. D. B. Ingham and I. Pop, Pergamon 2002.
- [2] B. V. Antohe in J. L. Lage, *A general two-equation macroscopic turbulence model for incompressible flow in porous media*, Int. J. Heat Mass Transfer, 40, 3013–3024, 1997.
- [3] D. Getachew, W. J. Minkowycz in J. L. Lage, *A modified form of the k-e model for turbulent flows of an incompressible fluid in porous media*, Int. J. Heat Mass Transfer, 43, 2909–2915, 2000.
- [4] T. Masuoka in Y. Takatsu, *Tubulence model for flow through porous media*, Int. J. Heat Mass Transfer, 39, 2803–2809, 1996.
- [5] A. Nakayama in F. Kuwahara, *A macroscopic turbulence model for flow in a porous medium*, J. Fluids. Eng., 121, 427–433, 1999.
- [6] M. H. J. Pedras in M. J. S. de Lemos, *On the definition of turbulent kinetic energy for flow in porous media*, Int. Comm. Heat Mass Transfer, 27, 211–220, 2000.
- [7] L. Škerget, M. Hriberšek, G. Kuhn, *Computational fluid dynamics by boundary-domain integral method*, Int. J. Numer. Meth. Engng., 46, 1291–1311, 1999.
- [8] R. Jecl, L. Škerget, *Boundary element method for natural convection in non-Newtonian fluid saturated square porous cavity*, Engng. Anal. Bound. Elem., 23, 963–975, 2003.
- [9] J. Kramer, R. Jecl in L. Škerget, *Boundary domain integral method for the study of double diffusive natural convection in porous media*, Engng. Anal. Bound. Elem., 31, 897–905, 2007.



Računalniška analiza porabe energije in časov pomešanja v posodi z modificiranim turbinskim mešalom

A. Bombač¹, D. Beader² in I. Žun¹

CFD analysis of the Power Consumption and Mixing Time in a Stirred Vessel with a modified Turbine Impeller

Povzetek. V delu so predstavljeni rezultati računalniške (CFD) analize porabe energije in časov pomešanja pri mešanju vode v posodi s standardnim turbinskim mešalom (RuT) in patentiranim turbinskim mešalom z dvema diskoma (DDT). CFD časi pomešanja temeljijo na enakem principu (motnja/odziv) kot meritve časov na merilni napravi. Kot motnja je bila uporabljena manjša količina vroče vode, dočim je odziv bila sprememba brezdimenzijske temperature v višini $\pm 5\%$ končne vrednosti. Moč mešanja, določena s pomočjo CFD analize je pri obeh mešalih bila manjša od izmerjene, časi pomešanja pa so zaradi izbrane metodologije bili ravno tako konsistentno daljši od izmerjenih.

Abstract. In the present work the mixing time of a stirred vessel driven by a Rushton (RuT) turbine and a patent-protected Double Disk Turbine (DDT) is given. The mixing time, based on the pulse-response method, using the criterion of $\pm 5\%$ of the final value, was determined from computational fluid dynamics (CFD) results. A smaller quantity of hot water was used as a pulse, while the response represented a change of temperature. In general, the computationally determined power consumption consistently underestimates the experimental results, while the CFD-determined mixing time, due to the methodology used, consistently overestimates the experimental findings.

1 Uvod

Na splošno velja, da je pri enaki disipirani energiji mešala učinkovitejše tisto mešalo, ki dosega pri enaki stopnji kvalitete pomešanja krajši čas. Disipacijo energije mešala pogojujejo tako geometrijska razmerja med posodo in mešalom [1], kot tudi oblika in izvedba mešala (radialno, aksialno mešalo) [2], pri standardni konfiguraciji pa dodatno še različne oblike lopatic enakih geometrijskih razmerij [3], kot tudi izvedbe motilnikov toka [6]. Z večanjem vrtlajev mešala se veča moč mešala, kar posredno predstavlja večjo črpalno zmogljivost mešala, le to pa intenzivnejšo cirkulacijo kapljevin ter s tem povezano krajši čas pomešanja [3,4].

V tem delu je prikazana CFD analiza porabe energije in časov pomešanja pri mešanju kapljevin s standardnim RuT in DDT mešalom. Poraba energije izražena z Newtonovim številom zajema vse zaviralne sile na stični površini med kapljevinou in gredjo z mešalom. Te vrednosti so primerjane z izmerjenimi na preizkusni napravi [3]. Kriterij za določitev časa pomešanja je bil pri CFD analizi

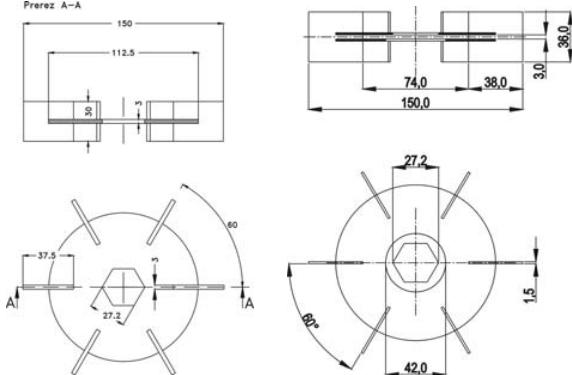
¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Laboratorij za dinamiko fluidov in termodynamiko

² AVL-AST d.o.o., Maribor

enak kot pri izvedbi meritve na eksperimentalni napravi [5], kar sploh omogoča medsebojno primerjavo vrednosti. Časi pomešanja so bili merjeni po metodi motnja-odziv, kjer je bila za motnjo uporabljenha manjša količina vroče vode vlita n točno določeno lokacijo [5]. Iz rezultatov je razvidno, da dosega DDT mešalo ob večji vrednosti Newtonovega števila krajše čase pomešanja primerjalno s standardnim RuT mešalom. Z večanjem vrtilne frekvence mešal se čas pomešanja krajša.

2 Merilna linija in preizkus

Mešanje kapljevine je v cilindrični posodi premera 450 mm potekalo z mešali premera 150 mm. Rushtonovo in DDT mešalo sta prikazani na sliki 1. Ostala geometrijska razmerja, kot tudi meritve momenta in vrtilne hitrosti mešal na preizkusni napravi so podrobnejše opisana v delih [1,3,5].



Slika 1: RuT mešalo (levo) in DDT mešalo (desno)

Meritve temperature so potekale na lokaciji $(r, z, \varphi) = (65\text{mm}, 420\text{mm}, 45^\circ)$, ostale podrobnosti v delu [5]. Za določitev časa pomešanja je bila uporabljena metoda *motnja-odziv* [3,5]. Za motnjo je bila uporabljenha voda (1 dm^3) temperature $90\text{-}95^\circ\text{C}$, ki je bila vlita v posodo tik nad gladino nad lokacijo termoelementa. Odziv je predstavljal nestacionarni konvektivni prehod toplotne na ožjo okolico. Naš časovni okvir opazovanja ni presegel 20 s, porast temperature je bil pri tem zanemarljiv. Iz časovnega zapisa temperaturnega odziva je bil čas pomešanja dosežen po kriteriju $T'_{\infty} = \pm 5\%$, ki je že bil podrobno predstavljen v delu [5]. Pri meritvah temperaturnega odziva je v našem primeru bila izbrana samo ena lokacija, saj je šlo predvsem za medsebojno primerjavo izmerjenih in CFD vrednosti pri enakih vrtilnih frekvencah mešala.

3 Računalniški izračun

Izračun tokovnega polja je pred izvajanjem prehodnega pojava dosegel stacionarno stanje. Predpostavimo, da je spremembra prostornine zaradi ulitja vroče vode zanemarljiva in gladina kapljevine vseskozi ravna [5]. Mešanje kapljevine obravnavamo kot enofazni sistem s sklopom enačb: momentna, kontinuitetna in energijska enačba za eno samo fazo. Zapisano v splošni diferencialni obliki:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\rho} \hat{V}_i}{\partial x_j} = 0 \quad (2)$$

$$\hat{\rho} \frac{\partial \hat{V}_i}{\partial t} + \hat{\rho} \hat{V}_j \frac{\partial \hat{V}_i}{\partial x_j} = \hat{\rho} g_i - \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \hat{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{V}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \hat{V}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \right] - \hat{\rho} (2 \hat{V}_k + \omega_l x_m \varepsilon_{lmk}) \omega_j \varepsilon_{jkl} \quad (3)$$

$$\hat{\rho} \left(\frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial t} + \hat{V}_j \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial x_j} \right) = \hat{\rho} \dot{q}_g + \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{\tau}_{ij} \hat{V}_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_j}) \quad (4)$$

kjer so:

$$\hat{V}_i = \hat{U}_i - \omega_j x_k \varepsilon_{jkl}, \quad \hat{W}_i = \omega_j x_k \varepsilon_{jkl} \quad \text{in} \quad \hat{\Omega} = C_p \hat{T} + \frac{1}{2} (\hat{V}_i \hat{V}_i - \hat{W}_i \hat{W}_i).$$

Oznake pomenijo: V_i - relativna hitrost, ρ - gostota, g_i - gravitacijski vektor, p - tlak, ω_i - vektor rotacije, μ - viskoznost, x_i - vektor položaja, U_i - vektor hitrosti, ε_{ijk} - permutacijski simbol in λ - toplotna prevodnost. Modeliranje turbulentnih tokov zahteva primerne postopke, s katerimi dosledno opišemo učinke fluktuacij hitrosti in ostalih skalarnih veličin v osnovnih ohranitvenih enačbah. Za reševanje teh enačb smo izbrali metodo Reynoldsovega povprečenja. Tako sta v sistem enačb vpeljani dve dodatni spremenljivki: turbulentni napetostni tenzor in turbulentni toplotni fluks. Ker je Reynoldsovo število večje od $3 \cdot 10^5$ ($n \geq 100 \text{ min}^{-1}$), je sistem enačb zaključen s Standardnim $k-\varepsilon$ modelom turbulence za velika Reynoldsova števila. Ta k zgornjem sistemu enačb prispeva še dve enačbi in sicer za turbulentno kinetično energijo (k) in njeni disipacijo (ε):

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P + G - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \quad (5)$$

$$\rho \frac{D \varepsilon}{Dt} = \left(C_{\varepsilon 1} P + C_{\varepsilon 3} G + C_{\varepsilon 4} k \frac{\partial U_k}{\partial x_k} - C_{\varepsilon 2} \varepsilon \right) \frac{\varepsilon}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad (6)$$

kjer so:

$$P = -2 \mu_t S : S - \frac{2}{3} [\mu_t (tr S) + k] tr S, \quad S = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \quad G = -\frac{\mu_t}{\rho \sigma_\rho} \nabla \rho \quad \text{in} \quad \mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}.$$

Oznake pomenijo: μ_t - turbulentna viskoznost in σ_k - turbulentno Prandtovo število ($\sigma_k = 1$). Izračun je bil narejen s komercialnim računalniškim paketom *AVL Fire* [8], ki rešuje integralsko obliko danih enačb po metodi kontrolnih volumnov.

Geometrija in mreža: Tokrat je bila uporabljena računska mreža s 602550 celicami in ustrezno gostoto, ki sicer omogoča konsistentno uporabo standardne zidne funkcije. Mreža je kombinirana iz blok-strukturirane (posoda) kot v delu [5] in prav tako blok-strukturirane (mešalo) mreže, ki sta bili generirani znotraj predprocesorja *AVL Fire* [8].

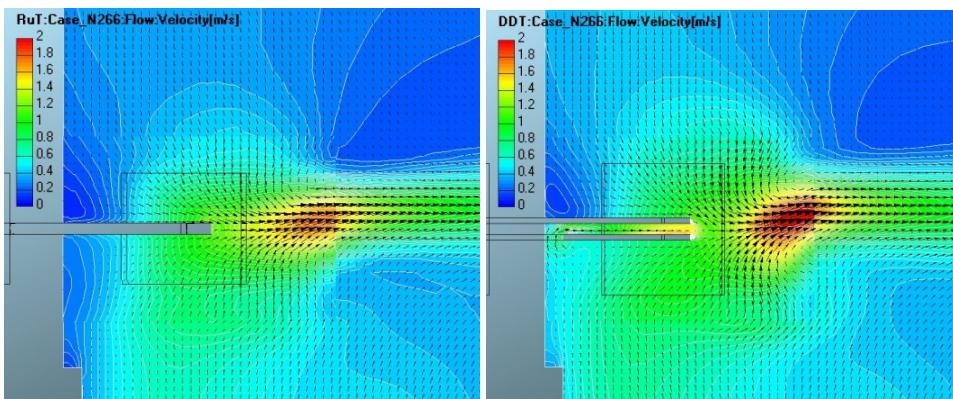
Začetni in robni pogoji: Začetno stanje predstavlja voda pri sobni temperaturi. Na stenah gredi in mešala so kot robni pogoj bile uporabljene obodne hitrosti ter konstantna temperatura enaka temperaturi okolice. Na stenah posode je bila prav tako predpisana temperatura enaka okolici (293,15K), na gladini kapljevine pa simetrija.

Konvergenčni pogoji: Kriterij konvergence je bil dosežen z reduciranim preostankom manjšim kot $1 \cdot 10^{-3}$, razen pri skalarju, kjer je bil $1 \cdot 10^{-7}$. Za določanje časa pomešanja je bila uporabljena fluktuacija brezdimenzijske temperature $\theta = (T - T_0)/(T_{max} - T_0)$ vzeta kot pasivni skalar, v višini 5%

končne povprečne vrednosti na enaki lokaciji, kot so bile izvedene meritve na preizkusni napravi [5]. Ker so motilniki toka od mešala dovolj oddaljeni, da le minimalno vplivajo na tokovne razmere ob mešalu, je lahko uporabljena tehnika "Multiple reference frame" - hkratna uporaba večjega števila referenčnih koordinatnih sistemov. Območje neposredno ob mešalu obravnavamo v rotirajočem koordinatnem sistemu, v katerem se vpliv rotacije odraža v dodatnih členih povezanih s Coriolisovo in centrifugalno silo. V tem območju sistem enačb rešujemo v celoti. Nasprotno, zunaj ožega območja okoli mešala (torej v večjem delu računskega območja) rešujemo poenostavljen sistem enačb, ki ne vsebuje členov povezanih z rotacijo, vektor relativne hitrosti V_i , pa formalno nadomestimo z vektorjem hitrosti U_i . V prvem koraku je sistem enačb (2, 3, 5 in 6) reševan kot časovno neodvisen (MRF, steady-state). Tako je občutno (večkratno) skrajšan čas izračuna. Ko je bilo doseženo stacionarno stanje, je bil izračun hitrostnega polja "zamrznjen", simulacija pa nadaljevana z izračunom spremembe koncentracije brezdimenzijske temperature. Ta je bila z vrednostjo 1 inicirana v prostornini okoli merilnega mesta, vse dokler ustrezeni delež kapljevine ni dosegel skupne prostornine dodane tople vode (1 dm^3). To stanje je bilo doseženo po približno eni sekundi simulacije (pri $n=266 \text{ min}^{-1}$), kar tudi ustreza ocenjenemu času dolivanja vroče vode pri samem eksperimentu. Pri izračunu časov pomešanja je uporabljena skupina celic (ki zajemajo skupaj 1dm^3) katere relativna napaka je manjša od 1% [5].

4 Rezultati in razprava

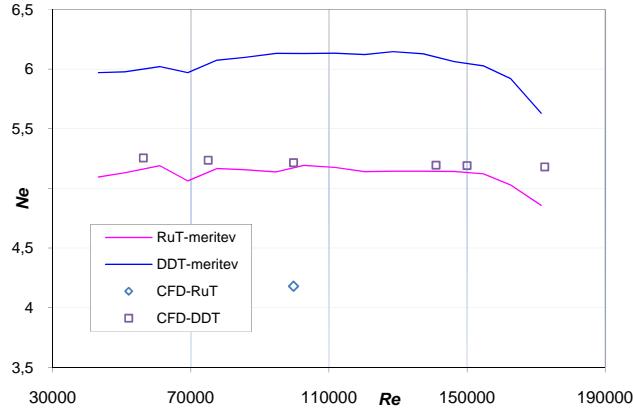
S CFD izračunom tokovnega polja je omogočen kvalitativen vpogled vanj in primerjava različnih veličin med mešanjem z RuT in DDT mešalom. Na sliki 2 so prikazani vektorji hitrosti v $r-z$ ravnini na $\frac{1}{2}$ med motilnikoma toka.



Slika 2: Hitrostno polje izstopajočega toka RuT in DDT mešala

Moč mešala je bila merjena na gredi pri različnih vrtilnih frekvencah vse do nastanka površinske aeracije [1]. Odvisnost moči mešanja od vrtilne frekvence mešala je podana posredno preko Newtonovega in Reynoldsovega števila, kot je prikazano na sliki 3. Vzrok zmanjšanja vrednosti Ne (pri $Re>137000$ za RuT mešalo in $Re>146000$ za DDT mešalo) je vdor zraka iz gladine v kapljevino, kar je vidno po ozkih in dolgih vrtincih vzdolž mešalne gredi. Povprečne vrednosti Newtonovega števila so za RuT mešalo 5,15 in DDT mešalo 6,04 [4], DDT mešalo dosega za

~17% večjo vrednost Ne od RuT mešala. Vzrok za to je vsekakor pripisati predvsem nekoliko višjim lopaticam in izrazitejšem izstopajočem toku iz mešala, ki ga ustvarja z dvema diskoma,



Slika 3: Prikaz izmerjenih in izračunanih Ne števil za RuT in DDT mešali

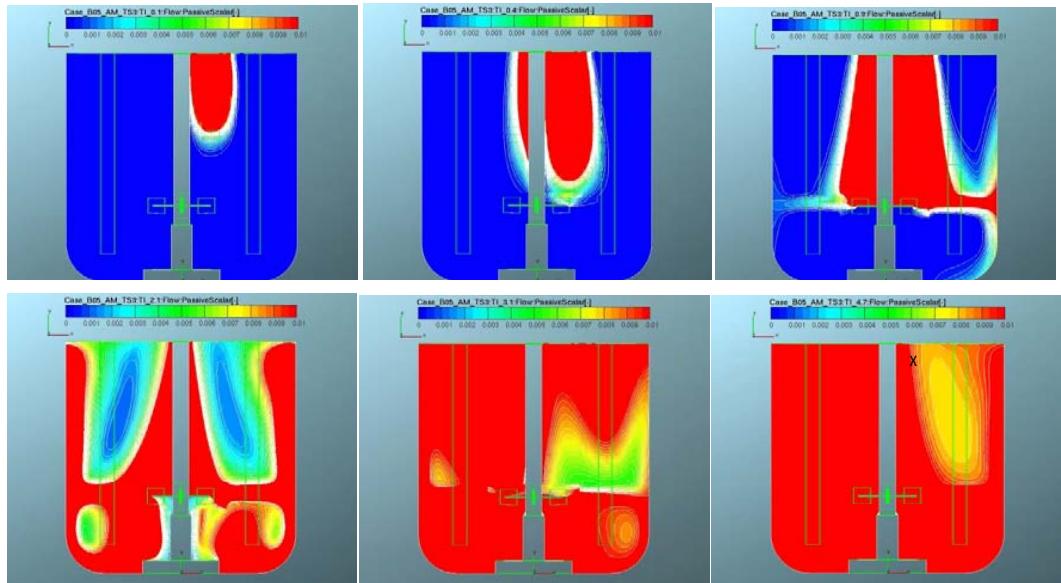
prikazano na sliki 5. Pri CFD analizi je Ne število bilo izračunano na osnovi njegove definicije $Ne = P/\rho n^3 D^5$. Moč mešala P je v tem primeru podana z izrazom $P = 2\pi n \tau$, kjer je moment τ zaviralne sile \mathbf{F} na stični površini med kapljevinou in gredjo z mešalom določen z integracijo izraza $\tau = \int \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, pri čemer \mathbf{r} predstavlja vektor razdalje med opazovanim površinskim elementom in osjo rotacije gredi. Izračunane vrednosti Ne števila so za DDT mešalo prikazane na sliki 4. Dosegajo povprečno vrednost 5,25, kar predstavlja za ~14 % manjšo vrednost Ne od izmerjenega povprečja. Žal je pri RuT mešalu na voljo za primerjavo zgolj ena točka, kjer pa je izračunana vrednost podobno (~18 %) manjša od izmerjenega povprečja. Odstopanja, čeprav konsistentna, lahko pripisemo predvsem pomanjkljivosti modela turbulence, uporabi stenskih funkcij, izbrani gostoti mreže ob stenah gredi in mešala in izbranemu modelu rotiranja mešala.

Čas pomešanja je podan s CFD izračunom kot kvalitativen vpogled časovno-krajevnega razvoja umešanja dodane kapljevine in je skladen z vizualnim opazovanjem dodanega barvila. V nadaljevanju je prikazan potek pomešanja v r - z ravnini lokacije termoelementa pri vrtilni frekvenci 267 min^{-1} , prikazano na slikah 4 za RuT mešalo in 5 za DDT mešalo. Rdeča (svetlejša) barva predstavlja vneseno vodo s temperaturo (ki je večja oz. enaka končni), modra barva (temnejša) predstavlja začetno nižjo temperaturo.

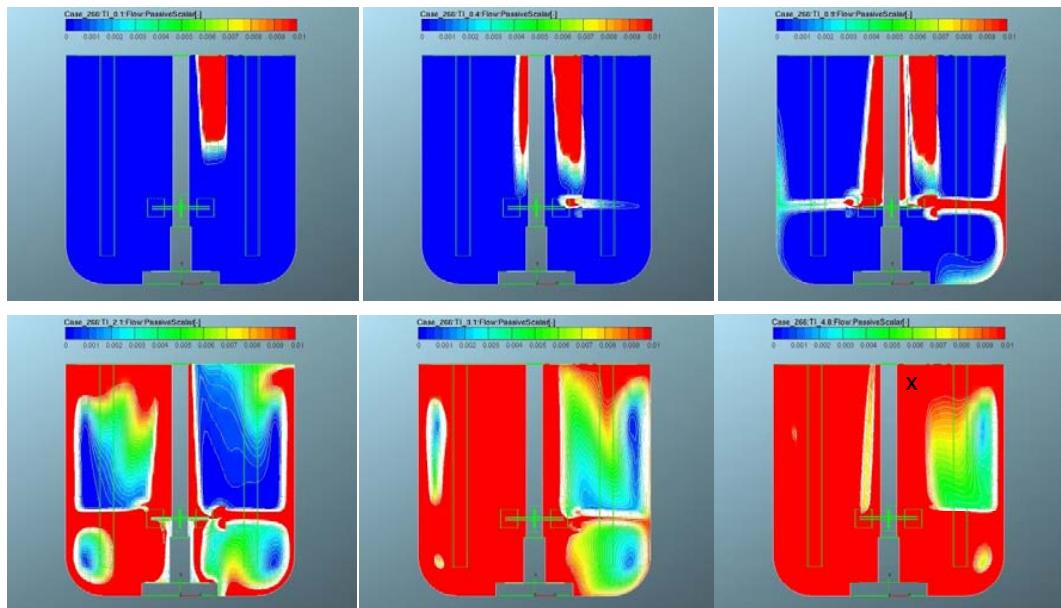
Pri obeh mešalih se motnja takoj ob vnosu sprva širi v smeri cirkulacije, to je navzdol proti mešalu, kjer z izstopajočim tokom izteka iz mešala. Pri DDT mešalu je zelo opazen izrazit radialno izstopajoč tok v smeri proti posodi mešala, posebej v primerjavi z RuT mešalom. Tok se ob steni posode razdeli v zgornjo in spodnjo cirkulacijsko zanko.

Iz nadaljnjega razvoja tokovnega polja sledi, da je pomešanje najprej doseženo v spodnjem delu ter kasneje tudi v zgornjem delu posode. V času, ko je na lokaciji termoelementa x pomešanje že doseženo, pa v bližnji okolici še ni, kot je to razvidno iz zadnje sekvence slik 4 in 5.

Kuhljevi dnevi 2008



Slika 4: Časovno - krajevni razvoj pomešanja pri RuT mešalu



Slika 5: Časovno - krajevni razvoj pomešanja pri DDT mešalu

Časi pomešanja so na osnovi merjenih vrednosti tako RuT kot DDT mešala na eksperimentalni napravi[4] aproksimirani s sledečo enačbo:

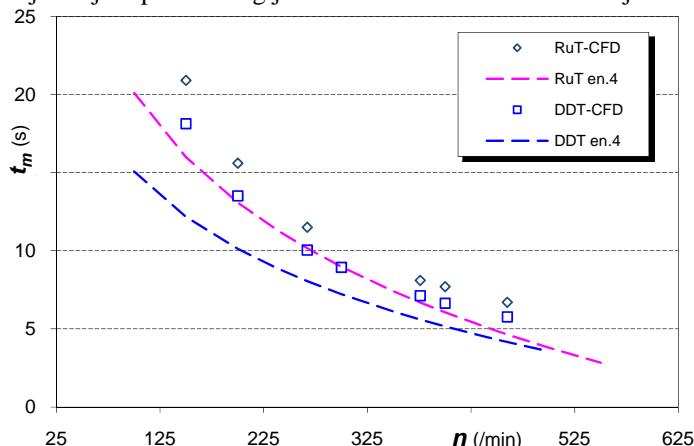
$$t_m = a + b \cdot \ln(n), \quad (7)$$

pri čemer je n - vrtilna frekvenca mešala [min^{-1}] . Koeficienti a in b ter R so prikazani v tabeli 1.

Tabela 1: Parametri regresijske krivulje po enačbi (4).

Mešalo	a	b	R
RuT	66,736	- 10,127	0,945
DDT	48,021	-7,154	0,7928

Na sliki 6 so prikazane vrednosti meritev korelirane po en.7 za različne vrtilne frekvence. Razvidno je, da se z večanjem vrtilne frekvence (moči mešanja) čas pomešanja pri obeh mešali eksponentno krajsa. Omenjeni mešali imata radialno izstopajoc tok iz mešala, ki se ob steni posode razdeli na zgornjo ter spodnjo cirkulacijsko zanko. Večja dispirana moč DDT mešala torej posredno predstavlja večjo črpalno zmogljivost mešala oziroma intenzivnejšo cirkulacijo, ter s



Slika 6: Preizkusno izmerjene in CFD izračunane vrednosti časov pomešanja

tem povezano krajsi čas pomešanja na merni lokaciji. Krajše čase pomešanja dosega DDT mešalo, kar je skladno z večjo disipacijo energije mešala. V literaturi je najti kar nekaj kriterijev, ki čas pomešanja za poljubno izvedbo mešala v okviru standardnih razmerij korelirajo predvsem z močjo mešanja. Pri tem je pomembno navesti, da čas pomešanja predstavlja samo čas, dosežen na *določeni* lokaciji, časi pomešanja so lahko glede na različne merilne lokacije različni [2]. Iz CFD prikaza razvoja pomešanja, prikazano na slikah 4 in 5, sledi, da so nehomogenosti, kljub doseženemu pomešanju na izbrani lokaciji, še vedno lahko prisotne v posodi. Različna mešala torej ne dosegajo enakih rezultatov procesa. Sledi, da je čas pomešanja dokaj groba ocena mešalne učinkovitosti. Ujemanje izmerjenih in CFD vrednosti je zelo dobro. Zadnje so, predvsem zaradi izbranega pristopa "zamrznitve" hitrostnega polja, nekoliko višje od izmerjenih, v povprečju za 20% za RuT mešalo in 22% za DDT mešalo. Večja vrtilna frekvenca mešala oz.

disipirana moč mešala posredno predstavlja večjo črpalno zmogljivost mešala, ter s tem intenzivnejšo cirkulacijo oziroma krajši čas pomešanja.

5 Zaključki

Izračun porabe energije, izražena z Newtonovim številom, in časov pomešanja pri mešanju kapljevine v posodi s standardnim Rushtonovim mešalom in modificiranim mešalom z dvema diskoma je bil opravljen s programskim paketom *AVL Fire*. Poraba energije zajema vse zaviralne sile na stični površini med kapljevinou in gredjo z mešalom, čas pomešanja je določen po enakem principu kot pri meritvah na mešalni napravi (na osnovi metode motnja-odziv, kjer je bila za motnjo uporabljena manjša količina vroče vode vlita v posodo, odziv pa predstavlja spremembu temperature pri pomešanju).

Za določanje časa pomešanja je bila uporabljena fluktuacija brezdimenzijske temperature, vzeta kot pasivni skalar, v višini 5% njene končne povprečne vrednosti na enaki lokaciji, kot so bile izvedene meritve na preizkusni napravi. Uporabljena je bila tehnika hkratne uporabe večjega števila referenčnih koordinatnih sistemov (Multiple Reference Frame).

Rezultati CFD izračuna kažejo, da so vrednosti porabe energije (Newtonovo število) konsistentno manjše od izmerjenih. Iz medsebojne primerjave rezultatov časov pomešanja je razvidno, da so vrednosti izračunanih časov pomešanja konsistentno nekoliko višje od eksperimentalno dobljenih. Časi pomešanja se pričakovano krajšajo z večanjem vrtilne hitrosti mešala.

Zahvala

To delo je del projekta št.No.P2-162, ki ga financira Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport RS.

Literatura

- [1] Bombač, A., Vpliv geometrijskih parametrov na Newtonovo število pri aeraciji v posodi z mešali, *Strojniški vestnik* (44) št. 3-4, 105–116, **1998**
- [2] Haucine, I., Plasari, E., David, R., Effects of the Stirred Tank's Design on Power Consumption and Mixing time in Liquid Phase, *Chem.Eng.Technol.* (23), 7–15, **2001**
- [3] Nienow, A.W., On impeller circulation and mixing effectiveness in the turbulent flow regime, *Chem. Eng. Science*, (52), 2557 – 2565, **1997**
- [4] Bombač, A., Žun I. Power consumption and mixing time in stirring with modified impellers. *Proc. of the 12th European Conference on Mixing, Bologna*, AIDIC Servizi S.r.l., **2006**
- [5] Bombač, A., Beader, D., Žun, I. Temperaturni odziv pri raziskavi časa pomešanja v posodi s turbinskim mešalom. *Kuhljevi dnevi 2008*, Cerknje na Gorenjskem, Slovensko društvo za mehaniko, **2008**
- [6] Bombač, A., Žun, I., Eksperimentalna raziskava učinkovitosti modificiranega turbinskega mešala. *Kuhljevi dnevi 2005*, Podčetrtek, Slovensko društvo za mehaniko, **2004**
- [7] Karcz, J., Major, M. An Effect of a Baffle Length on the Power Consumption in an Agitated Vessel, *Chem.Eng.Proc.* (37), 249–256, **1998**
- [8] AVL Fire, Manual pages, v2008, AVL-List GMBH, **2008**



Vpliv zaščitne mreže na obratovalno karakteristiko aksialnega ventilatorja ter optimizacija njene konture

Alič Gregor¹, Brane Širok², Marko Hočvar²

Impact of guard grill to operating characteristics of axial fan and its contour optimization

Povzetek. V prispevku je predstavljen vpliv zaščitne mreže (mreža) na aerodinamsko integralno karakteristiko (AIK) ter na skupno raven zvočne moči in spekter ravni zvočnega tlaka v dveh obratovalnih točkah aksialnega ventilatorja (ventilator) z in brez mreže. Študija vpliva mreže je bila izvedena z meritvami na integralnem nivoju in z lokalnimi meritvami izstopnega hitrostnega polja ventilatorja brez mreže v optimalni obratovalni točki. Na osnovi rezultatov lokalnih meritev je bila izdelana optimirana kontura mreže.

Abstract. This paper presents the impact of the guard grill on the aerodynamic integral characteristic, spectrum of sound pressure level and total sound power level (TSPL) at two operating points of an axial fan with and without grill. The study of the grill's impact was conducted with measurements at integral level and local outflow velocity field of fan without grill. The measurement results of the local outflow velocity field of fan without grill at the optimal operating point were used to model an optimized grill contour.

1 Uvod

V industrijski praksi poteka razvoj ventilatorjev najpogosteje ob predpostavki odločujočega vpliva rotorja ter ustja ventilatorja na obratovalne pogoje, medtem ko je vpliv mreže ter nosilne konstrukcije empirično ovrednoten oziroma ni upoštevan. V dostopni literaturi ni poročil raziskav dejanskega vpliva mreže ter nosilne konstrukcije na točnost določanja obratovalnih lastnosti ventilatorjev.

Oblikovanje ventilatorjev za doseganje želenih AIK obravnava več avtorjev. Wallis s soavtorji [1] predstavlja analitične postopke oblikovanja ventilatorjev skupaj z vstopnimi in izstopnimi kanali. V članku [2] Kergourlay G. s soavtorji preučujejo vpliv smeri ukrivljenosti lopatic podobnih ventilatorjev na AIK ter z anemometrijo na vročo žičko vpliv na lokalno hitrostno polje. Analizo virov hrupa v zunanjih klimatskih napravah je opravil Jiang

C. s soavtorji [3]. V članku je obravnavana med drugim raven zvočne moči aplikacije z in brez mreže, ki podaja izhodišče pričakovanih rezultatov pričujočega članka.

Pomembnost vpliva mreže na AIK in skupno raven zvočne moči ventilatorjev izkazujejo nekateri patentni na temo oblikovanja le-te [4, 5, 6]. Patent [4] opisuje rešitev za zmanjševanje vrtinčenje zračnega toka na mreži z dodatnimi vodilnimi lopaticami. Patenta [5, 6] opiseta rešitev za zagotavljanje čim večjega prostega preseka na izstopni strani mreže ventilatorja.

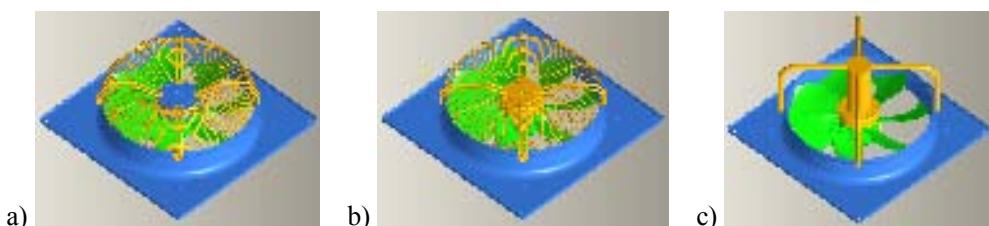
1.1 Opis ventilatorja s primerjalno in optimirano zaščitno mrežo ter brez nje

Analiza vpliva mreže na karakteristike ventilatorja je bila izvedena na ventilatorju s sedmimi neprofiliranimi naprej zakriviljenimi lopaticami. Osnovne geometrijske karakteristike ventilatorja so podane s premerom izstopnega ustja $D_{\max} = 504\text{mm}$, premerom rotorja $D_{\text{ob}} = 497\text{mm}$ ter premerom pesta $D_{\text{pe}} = 140\text{mm}$.

Zaščitni mreži sta izvedeni v skladu s standardom EN 294 [7], ki predpisuje varnostne ukrepe pred poškodbami zgornjih udov v mehanskih napravah. Obe izvedbi mrež imata koncentrične zaščitne žice premera 2,8mm, prečne pomožne žice premera 5,6mm ter nosilne žice premera 8mm.

Ventilator s standardno mrežo je prikazan na Slika 1 a. Mreža ima največji odmak od izstopne ravnine ustja $s_p = 52\text{mm}$. Celotna površina konture mreže znaša $0,210\text{m}^2$, katero v velikosti 38% pokrivajo koncentrične žice z nosilci. Ventilator z optimirano mrežo je prikazan na sliki 1 b. Ima največji odmak od izstopne ravnine ustja $s_{\text{op}} = 27\text{mm}$. Celotna površina konture mreže znaša $0,171\text{m}^2$, katero v velikosti 38% pokrivajo koncentrične žice z nosilci. Standardna mreža ima 19,7% večjo prosto pretočno površino v primerjavi z optimirano.

Ventilator brez mreže je bil pritrjen na ustje preko nosilne konstrukcije s štirimi kraki, kot je prikazano na sliki 1 c. Odmik štirih nosilnih konzol od ravnine vpetja rotorja je značilno večji, kot je oddaljenost mreže. To nam dovoljuje postavitev predpostavke, da nosilne konzole ne vplivajo na tokovne strukture na izstopu iz rotorja.



Slika 1: Izvedba ventilatorja s standardno in optimirano mrežo ter brez mreže.

Na predstavljenih izvedbah ventilatorjev, z enakimi ustji ter pozicijami rotorja glede na ustje, je bila izvedena eksperimentalna primerjalna analiza vpliva referenčne ter optimirane mreže na AIK ter skupno raven zvočne moči pri dveh obratovalnih točkah.

2 Merilni postopki in postopek optimizacije zaščitne mreže

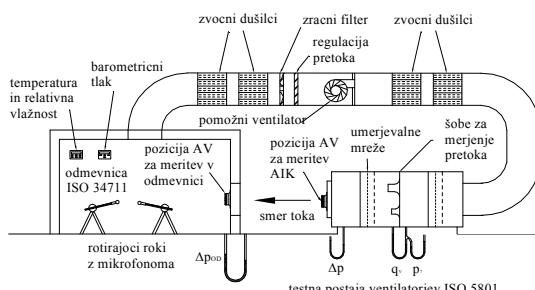
V nadaljevanju so predstavljene uporabljene merilne metode in redosled poteka meritev. Na ventilatorju brez mreže je bila pomerjena AIK. Z njegovo delovno karakteristiko je bila določena optimalna obratovalna točka, v kateri so bile opravljene lokalne meritve izstopnega hitrostnega polja. Z izstopnim hitrostnim poljem so bili dani vsi potrebni podatki za oblikovanje in izdelavo optimirane zaščitne mreže. V nadaljevanju sta bili pomerjeni še AIK standardne in optimirane mreže.

2.1 Meritve integralnih karakteristik

Integralne meritve ventilatorja s standardno ter optimirano mrežo in brez nje so bile izvedene na merilni postaji ventilatorjev v laboratoriju Hidria Inštitut Klima. Merilna postaja je narejena v skladu s standardom ISO 5801 [8] in je tudi sestavni del odmevnice, slika 2.

Pretočno tlačna karakteristika ventilatorjev je bila merjena s tremi merilniki defirencialnega tlaka Mensor 6100, slika 2. Za določitev ambientnih pogojev je bil uporabljen merilnik temperature in relativne vlage Vaisala HMT 330 ter za barometrski tlak merilnik Vaisala PTB 220. Poleg aerodinamskih parametrov je bila merjena še trošena moč P z analizatorjem moči Zimmer LGM450 in vrtilna frekvenca rotorja ventilatorja z optičnim merilnikom. Iz merjenih veličin je bil izračunan totalni izkoristek ventilatorja, ki je podan z izrazom 1 [8]:

$$\eta = \frac{q_V \left[A_p s + \left(\frac{q_V}{A_{AF}} \right)^2 \frac{\rho}{2} \right]}{P_{el}} \quad (1)$$



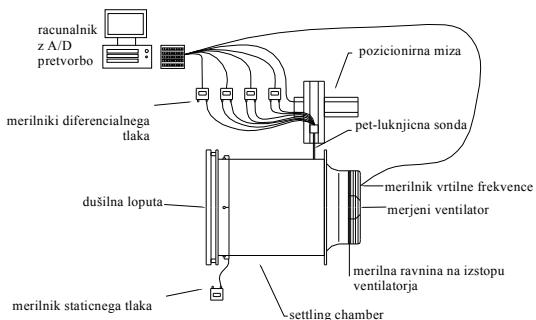
Slika 2: Združeni sistem merilne postaje ventilatorjev in odmevnice.

2.2 Meritve lokalnih hitrosti in izdelava optimirane zaščitne mreže

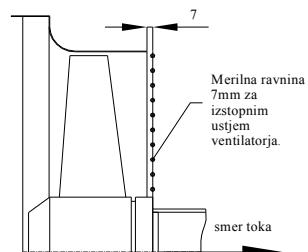
Za potrebe izdelave optimirane zaščitne mreže so bile izvedene lokalne meritve izstopnega hitrostnega polja ventilatorja brez mreže pri obratovalni točki z največjim izkoristkom.

Meritve lokalnih hitrosti so bile izvedene s pet-luknjično sondjo. Pri meritvah sta bili privzeti predpostavki, da je tok zraka stacionaren za vsako nastavljenou delovno točko in da je na izstopu ventilatorja osno simetričen glede na os vrtenja rotorja.

Za zadostitev pogoja osne simetrije je bil eksperiment izveden v koaksialnem kanalu, ki je zagotavljal neovirano vstopno in izstopno hitrostno polje brez vrtinčnih tokovnih struktur v skladu z zahtevami standarda ISO 5801 [8]. Shema postaje je prikazana na sliki 3.



Slika 3: Shema postaje za merjenje lokalnih karakteristik s 5-luknjično sondom.



Slika 4: Ravnina meritve na izstopu ventilatorja.

Iznos hitrosti, oziroma pripadajoče komponente hitrosti so izračunane iz razmerij izmerjenih tlakov na petluknjični sondi, izmerjenega kota α ter umerjevalnih algoritmov, ki so podani na osnovi predhodnega umerjanja sonde. Diference statičnega tlaka na posameznih tlačnih priključkih sond so bile zajeti simultano s tlačnimi senzorji Endres + hauser tip PD 235.

Meritve izstopnega hitrostnega polja ventilatorja brez mreže smo izvedli 7mm za ustjem ventilatorja prikazano na sliki 4. Meritve so bile izvedene v 12 očkah na polmerih od 90 do 255mm s korakom 15mm.

Na osnovi rezultatov meritev lokalnih hitrosti ventilatorja brez mreže je bila izdelana optimirana kontura mreže. Le ta je oblikovana pravokotno na izstopni profil meridianske izstopne hitrosti, slika 8. Potek konture se prične na obodu s pogojem tangentnosti na izstopno ustje ventilatorja ter nadaljuje preko merilnih točk s pogojem tangentnosti na predhodno merilno točko do premera 215mm. Pri premeru 215mm optimirana kontura mreže ne sledi več pravokotnosti na meridiansko hitrost, temveč se enakomerno spusti do ravnine pritrditve ventilatorja.

2.3 Meritev zvočne moči

Meritve ventilatorja s standardno ter optimirano mrežo in brez nje so bile izvedene v odmevni sobi prikazane na sliki 2 in narejeni v skladu s standardom ISO 3471 [9]. Notranje mere odmevnice so $7,4 \times 8,9 \times 4,2\text{m}$, kar dopušča meritve nad frekvenco 92Hz. Meritve spektra ravni zvočnega tlaka in ravni zvočne moči so bile izvedene v skladu s standardom ISO 13471 [10].

Testirani ventilatorji so bili nameščeni v standardnem ustju, le ta pa na ploščo v odprtini odmevnice. Obratovalna točka ventilatorja je bila nastavljena z nastavivijo Δp_{OD} pred in za testiranim ventilatorjem s pomočjo pomožnega ventilatorja in dušilnih žaluzij, slika 2.

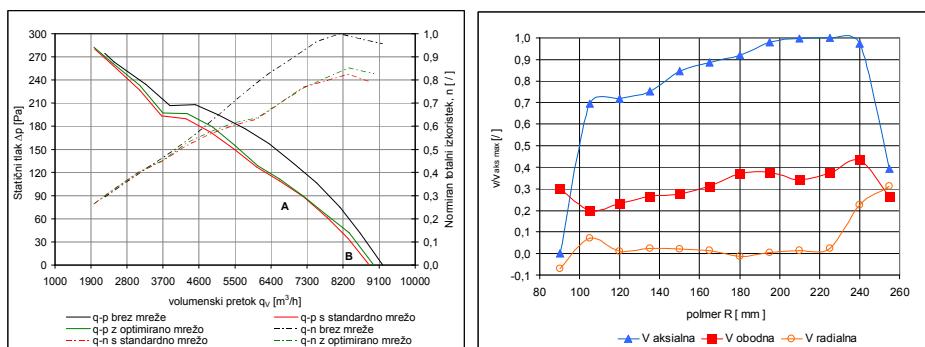
Pri meritvah spektra ravni zvočnega tlaka in ravni zvočne moči smo uporabili zvočni analizator proizvajalca Brüel&Kjaer tipa 2260 z dvema mikrofonoma tipa 4189, ki sta bila nameščena na rotirajoči roki tipa 3923. Uporabljeni mikrofoni sta bila predhodno interna kalibrirana s kalibratorjem istega proizvajalca type 4231. Merilna oprema ustreza zahtevam standarda ISO3741 [9], ki zagotavlja ponovljivost najmanj v redu velikosti 0,5dB.

3 Rezultati meritev

V nadaljevanju so predstavljeni rezultati integralnih ter lokalnih meritev ventilatorjev s standardno in optimirano mrežo ter brez nje.

3.1 Integralna karakteristika ventilatorjev

Na diagramu slike 5 so predstavljene AIK ventilatorja brez mreže ter ventilatorja s standardno in optimirano mrežo. Vrednosti so normirane na konstantne vrtljaje $n = 1386$ rpm in gostoto zraka $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$. Totalni izkoristek ventilatorja je normiran na maksimalni izkoristek ventilatorja brez mreže. Rezultati meritev omogočajo oceno vpliva mreže na AIK.



Slika. 5: Primerjava integralne karakteristike diferencialni tlak - pretok ter normirani totalni izkoristek - pretok primerjanih ventilatorjev.

Slika. 6: Lokalne izstopne hitrosti ventilatorja brez zaščitne mreže pri optimalnem izkoristku.

AIK na sliki 5 je razdeljena na dve različni obratovalni področji najpogosteje uporabljenega obratovalnega področja ventilatorjev. Obratovalni področji sta enaki za vse tri primerjane ventilatorje in sicer:

- obratovalno področje A s pretoki od $\sim 6000 \text{ m}^3/\text{h}$ do $\sim 7800 \text{ m}^3/\text{h}$ ter
- obratovalno področje B s pretoki nad $\sim 7800 \text{ m}^3/\text{h}$.

V obratovalnem področju A so razlike med AIK ventilatorjev z optimirano in standardno mrežo neznačilne. Oba ventilatorja z mrežo pridelata do 38Pa manjši statični tlak in 18% slabši izkoristek v primerjavi z ventilatorjem brez mreže pri pretoku $6000 \text{ m}^3/\text{h}$.

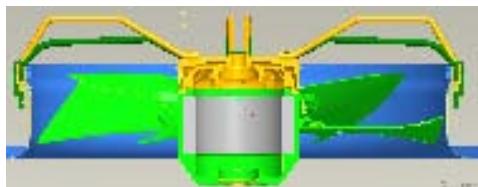
S povečevanjem pretoka v obratovalnem področju B se razlike med ventilatorjema z mrežo povečajo. Pri enakem pretoku pridela ventilator z optimirano mrežo do 18Pa in 14,8% ter ventilator s standardno mrežo do 27Pa in 17,5% manjši statični tlak ter totalni izkoristek v primerjavi z ventilatorjem brez mreže.

Na osnovi predstavljenih rezultatov AIK je bila izbrana ena obratovalna točka ventilatorja za vsako obratovalno področje. Izbrani obratovalni točki sta definirani pri enakem pretoku za vse primerjane ventilatorje in sicer:

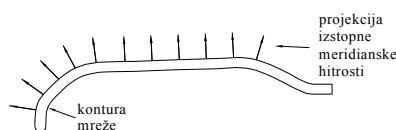
- obratovalna točka "a" s pretokom $7200 \text{ m}^3/\text{h}$ in
- optimalna obratovalna točka "b" s pretokom $8300 \text{ m}^3/\text{h}$.

3.2 Vektorsko polje izstopne hitrosti

V nadaljevanju so predstavljeni rezultati meritev izstopnega hitrostnega polja ventilatorja brez mreže v obratovalni točki "b" z največjim izkoristkom, slika 6.



Slika 7: Primerjava konture standardne (svetla) ter optimirane (temna) mreže brez zaščitnih žic.



Slika 8: Oblikovanje konture mreže pravokotno na izstopni profil meridianske hitrosti.

Na osnovi izmerjenega hitrostnega profila je bila izdelana optimirana mreža, katere kontura je bila oblikovana pravokotno na vrednost aksialne ter radialne komponente izstopne hitrosti. Razlika med konturama standardne ter optimirane mreže je podana na sliki 7.

3.3 Raven zvočne moči

Diagrama na slikah 9 in 10 predstavlja A utežena spektra ravni zvočnega tlaka v dveh obratovalnih točkah a in b. V tabeli 2 so prikazane A utežene ravni zvočne moči primerjanih ventilatorjev za isti obratovalni točki.

Za primerjane ventilatorje je značilna frekvenca prehoda lopatic ter njenih harmonikov z osnovno frekvenco 162Hz. Močno izrazite ima ventilator brez mreže, medtem ko ima ventilator z optimirano mrežo izrazitejše v primerjavi z ventilatorjem s standardno mrežo. Ventilatorja z mrežo imata značilno kopico v frekvenčnem območju med ~800 in ~1800Hz v primerjavi z ventilatorjem brez mreže. Le ta je posledica tvorjenja von Karmanovih vrtincev za strukturo žic mreže z nazivno frekvenco podano po enačbi 2 [11]

$$f_{karman} = 0,21 \frac{v}{d} \quad \text{za } 150 < Re < 10^5 \quad (2)$$

V tabeli 1 so vrednosti Reynoldsovega števila ter Karmanove frekvence za uporabljeni žice na mreži v obratovalni točki a in b. Pri tem je narejena predpostavka, da je $v_{abs\ max}$ enaka 1,6 kratniku povprečne izstopne hitrosti, kot v primeru opravljenih lokalnih meritev ventilatorja brez mreže v optimalni obratovalni točki.

Tabela 1: Vrednosti Reynoldsovega števila ter Karmanove frekvence za uporabljeni žice.

Obratovalna točka	Premer žice 2,8mm		Premer ojačitev 5,6mm		Premer nosilcev 8mm	
	Re []	f _{karman} [Hz]	Re []	f _{karman} [Hz]	Re []	f _{karman} [Hz]
a	2972	1170	5308	658	8492	411
b	3385	1334	6045	750	9672	468

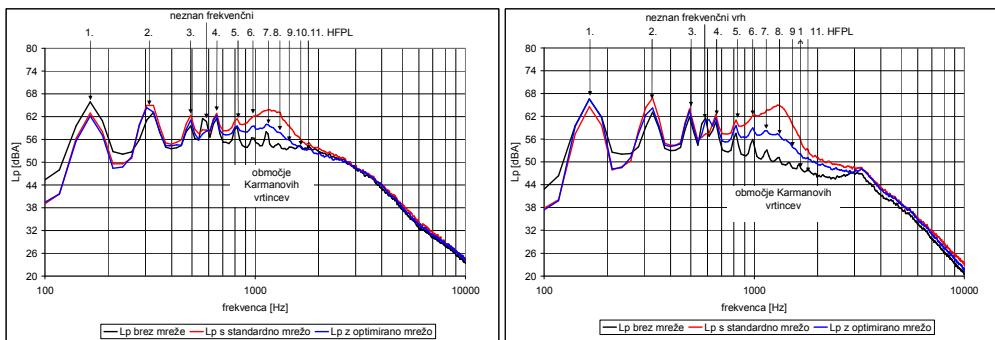
V diagramih spektra ravni zvočnega tlaka, sliki 9 in 10, je značilna le Karmanova frekvanca za žice premera 2,8mm, medtem, ko le ta za žice premera 5,6 in 8mm ni vidna. Raztros okoli nazivne frekvence je posledica nehomogenega hitrostnega profila, slika 6. Značilen je tudi premik nazivne Karmanove frekvence h višjim frekvencam z večanjem pretoka.

Razlike v spektru ravni zvočnega tlaka se odražajo tudi v A uteženih ravneh zvočne moči za posamezni ventilator in obratovalno točko, kar je prikazano v tabeli. 2.

Tabela 2: Raven zvočne moči primerjanih ventilatorjev za posamezne obratovalne točke.

Raven zvočne moči [dBA]

Obratovalna točka	Ventilator brez mreže	Ventilator s standardno mrežo	Ventilator z optimirano mrežo
a	77,7	80,6	78,8
b	76,8	81,2	78,4



Slika 9: A utežen spekter raveni zvočnega tlaka za obratovalno točko a.

Slika 10: A utežen spekter raveni zvočnega tlaka za obratovalno točko b.

Razlike med ventilatorji v A uteženih ravneh zvočne moči so posledica že opisanih razlik v spektru ravni zvočnega tlaka. Ravno tako je značilna razlika med ventilatorjem s standardno in optimirano mrežo. V obratovalni točki "a" ventilator z optimirano mrežo pridela 1,8 dBA ter v obratovalni točki "b" 2,8dBA manjšo raven zvočne moči. Rezultati so v skladu s pričakovanji meritev članka [3].

4 Povzetek

V predmetnem članku je bil raziskan vpliv mreže na AIK ter spekter ravn zvočnega tlaka in skupno raven zvočne moči. Poleg tega je bil podan tudi način za optimiranje zaščitne mreže. Pristop optimiranja je lahko identičen tudi pri drugih napravah s tokovnim poljem ter mrežo.

V AIK ima mreža značilen vpliv v obratovalnem področju A in B. V pretočno-tlačni karakteristiksi dosežeta ventilator s standardno mrežo do 38Pa manjši statični tlak ter karakteristiksi pretok-izkoristek do 18% slabši izkoristek v primerjavi z ventilatorjem brez

mreže. V obratovalnem področju B se razlike med ventilatorjem brez mreže ter ventilatorjem s standardno mrežo ohranijo.

Z namenom zmanjšanja vpliva mreže na AIK ter ravni zvočne moči je bilo izmerjeno lokalno izstopno hitrostno polje ventilatorja brez mreže pri optimalni obratovalni točki b. Za to obratovalno točko je bila oblikovana kontura optimirane mreže. Le ta je oblikovana pravokotno na meridiansko izstopno hitrost ventilatorja brez mreže.

Optimirana mreže kljub 19,7% manjši prosti pretočni površini pridelala 2,8% boljši izkoristek v optimalni obratovalni točki, v primerjavi z ventilatorjem s standardno mrežo. V obratovalnem področju A so razlike med ventilatorjema z optimirano ter standardno mrežo neznačilne.

V nadaljevanju so bile pomerjene ravni zvočne moči in spektri ravni zvočnega tlaka ventilatorjev v dveh obratovalnih točkah. Pri ventilatorju brez mreže so izrazitejše ravni zvočnega tlaka pri frekvenci prehoda lopatic ter njihovih harmonikih. Ventilatorja z mrežo imata v primerjavi z ventilatorjem brez mreže znaten doprinos h skupni ravni zvočne moči v območju Karmanovih vrtincev med ~800 in ~1800Hz, ki so generirani na žični strukturi mreže. Optimirana mreže ima vsled optimirane konture v tem območju manjši doprinos, kot referenčna mreža in v optimalni obratovalni točki doseže do 2,8dBA manjšo raven zvočne moči.

Literatura

- [1] Wallis, R. Allan, *Axial flow fans and ducts*; John Wiley & Sons, 1983
- [2] Gerald Kergourlay, Smaïne Koudri, Gary W. Rankin in Robert Rey; *Eksperimental investigation of the 3D unsteady flow field of axial fans*; Flow measurements and instrumentation; 2006
- [3] Jiang C-l., Chen J-p, Chen Z-j.; *Eksperimental and numerical study on aerocoustic sound of axial flow fan in room air conditioner*; Applied acoustics; 2007
- [4] F. Toshiya; *Fan grill and outdoor equipment for air-conditioner* JP2003172528; European patent office; 2003
- [5] E. Wilhelmus; *Outlet grill for use in an air-blowing device having axial fan* WO200406839; European patent office; 2004
- [6] Širok B., Pivk S.; *Protective grid of outlet orifice of axial fans*, SI22345 (A), European patent office: 2006
- [7] EN standards; *EN 294: Safety of machinery, Safety distances to prevent danger zones being reached by the upper limbs*; 1992
- [8] International organization for standardization; *ISO 5801: 1997 Industrial fans – Performance testing using standardized airways*, 1997
- [9] International standard organization; *ISO 3741:1999 Acoustics- Determination of sound power levels of noise sources using sound pressure- Precision methods for reverberation rooms*; 1999
- [10] International standard organization; *ISO 13347-2 Industrial fans – determination of fan sound power levels under standardized laboratory conditions – Reverberent room method*; 2004
- [11] Herrmann Schlichting, Klaus Gergsten; *Boundary-layer theory*; Springer-Verlag Berlin Heidelberg; 2000



Paralelizacija algoritma za simulacijo toka viskozne tekočine

Janez Lupše¹, Leopold Škerget, Jure Ravnik

Paralelisation of numerical algorithm for simulating viscous fluid flow

Povzetek. V članku je predstavljen primer paralelizacije algoritma za izvajanje numeričnih simulacij. Algoritem temelji na metodi robnih elementov in je namenjen reševanju problemov iz dinamike tekočin. Za paralelno programiranje je bil uporabljen MPI standard. Učinki paralelizacije na izračun kinematike ter tlaka so predstavljeni na primeru toka skozi kanal z valovito steno. Uporabili smo tri mreže različnih gostot z namenom primerjave pospešitve izvajanja programa.

Abstract. Article presents paralelisation of viscous flow solver algorithm. Algorithm is based on boundary element method and is used for solving fluid dynamics problems. It is composed of kinematic, kinetic and pressure computation part. For implementation of paralelisation MPI standard was used. Effects of paralelisation are shown on an example. We used three different meshes of different density with purpose of comparing acceleration of program execution.

1 Uvod

Ker danes rešujemo vedno bolj kompleksne industrijske probleme tudi s pomočjo numeričnih simulacij, se je pojavila potreba po hitrejšem izvajjanju simulacij z manjšimi spominskimi zahtevami.

Tradicionalno je bila programska oprema napisana za računalnike z enim samim procesorjem in spominom. Takšen računalnik v vsakem trenutku obdeluje samo en ukaz. Hitrost reševanja problemov je tako omejena z hitrostjo procesorja, hkrati pa je velikost problema omejena s spominom. Hitrosti računalnikov sicer še vedno naraščajo, obstaja pa seveda več omejitev, zakaj njihove hitrosti ne morejo poljubno naraščati. Prva omejitev je omejitev hitrosti pretoka podatkov skozi strojno opremo. Največja hitrost prenosa je hitrost svetlobe, ki znaša $30 \frac{\text{cm}}{\text{ns}}$, omejitev hitrosti prenosa bakrenega vodnika pa je $9 \frac{\text{cm}}{\text{ns}}$. Da bi povečali hitrosti prenosa, moramo

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za Strojništvo

zmanjšati razdaljo med posameznimi elementi. Tako pridemo do druge omejitve - omejitve najmanjše velikosti. Čeprav z današnjo tehnologijo nanašamo vedno več tranzistorjev na čip procesorja (trenutno je najmanjša velikost tranzistorja $\approx 45\text{ nm}$), ne moremo tranzistorje manjšati v neskončnost. Tretja omejitev pa je ekonomske narave; vedno manjši čipi z več tranzistorji so vedno dražji. Navadno je ceneje uporabiti več procesorjev z manj tranzistorji.

Pri paralelnem procesiranju hkrati obdelujemo več ukazov na več procesnih enotah. Takšen pristop lahko skrajša čas reševanja problemov, hkrati pa lahko tudi zmanjša omejitev spomina. Da lahko uporabimo paralelni pristop je pomembno, da lahko problem razbijemo na več diskretnih enot, katere lahko rešujemo neodvisno.

2 Paralelizacija programa

Za vpeljavo paralelizacije obstaja več abstraktnih teoretičnih modelov. V našem primeru smo se odločili za uporabo MPI standarda [1], ki predstavlja v industriji standard za prenos sporočil. Standard je sestavljen iz več knjižnic ter programov za implementacijo in zagon paralelnih programov.

2.1 Vodilne enačbe

Program BEMFLOW [5], katerega razvijamo na Fakulteti za Strojništvo, Univerza v Mariboru, je osnovan na numerični metodi robnih elementov ter hitrostno-vrtinčni formulaciji vodilnih enačb. Namenjen je reševanju toka ter prenosa toplote v tekočinah. Ker je program napisan v programskem jeziku FORTRAN 90, bodo v nadaljevanju opisani ukazi veljali za ta programski jezik. Vodilne enačbe so prevedene v hitrostno-vrtinčno obliko [7]. V tej obliki razdelimo problem na kinematični in kinetični del, tlak pa izračunamo šele po končnem izračunu vseh polj. Ob diskretizaciji vodilnih enačb dobimo velike in polne matrike. Paralelizacija je bila osnovana na prejšnjih poskusih [3]. Paralelizirali smo kinematiko toka nestisljive tekočine, katero opišemo z enačbo

$$\nabla^2 \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{\omega}. \quad (1)$$

V zgornji enačbi je \vec{v} vektor hitrosti ter $\vec{\omega}$ vektor vrtinčnosti. V integralski obliki ima gornja enačba obliko

$$c(\vec{\xi})\vec{v}(\vec{\xi}) + \int_{\Gamma} \vec{v}(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} u^*(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} d\Gamma + \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \times \vec{\omega}) u^* d\Omega, \quad \xi \in \Gamma, \quad (2)$$

v matrični pa

$$[D^{\Gamma}] \{ \omega^{\Gamma} \} = ([C] + [H]) \{ v_t \} + [H^t] \{ v_n \} - [D^{\Omega/\Gamma}] \{ \omega^{\Omega/\Gamma} \}. \quad (3)$$

V enačbi (2) je c geometrijski koeficient, $\vec{\xi}$ izvorna točka, \vec{n} normala, u^* fundamentalna rešitev Laplaceove enačbe, Γ rob območja ter Ω območje reševanja. V enačbi (3) so $[D^{\Gamma}]$, $[D^C]$, $[H]$, $[H^t]$ in $[D^{\Omega/\Gamma}]$ matrike integralov, ki so polne in nesimetrične. Matrika DD, katera je največja matrika v našem programu, je sestavljena iz matrike $[D^{\Gamma}]$ ter matrike $[D^{\Omega/\Gamma}]$. Matrika Akm pa

je enaka matriki $[D^\Gamma]$. Podrobna izpeljava gornjih enačb je opisana v članku Škerget in sod. [5].

Paralelizirali smo tudi tlačno enačbo. Ta ima obliko

$$\nabla^2 p = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}_p; \quad \vec{f}_p \equiv Eu \left\{ -\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \frac{1}{Re} \vec{\nabla} \times \vec{\omega} \right\}. \quad (4)$$

p predstavlja tlak, \vec{f}_p pa gradient tlaka, Eu pa Eulerjevo brezdimenzijsko število. Integralska oblika tlačne enačbe je enaka

$$c(\vec{\xi}) p(\vec{\xi}) + \int_{\Gamma} p (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) u^* d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) p d\Gamma - \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}_p) u^* d\Omega. \quad (5)$$

V matrični obliki pa jo lahko zapišemo kot

$$[H^\Gamma] \{p\} = [D^{\Omega/\Gamma}] \{f\}, \quad (6)$$

kjer sta matriki $[H^\Gamma]$ in $[D^{\Omega/\Gamma}]$ ponovno polni nesimetrični matriki. Podobno kot pri kinematiki je v programu z *DD* označena matrika $[D^{\Omega/\Gamma}]$, z Akm pa matrika $[H^\Gamma]$. Glavna razlika pri samem reševanju obeh sistemov enačb (kinematika in tlak) je v številu enačb. Kinematika ima število enačb enako številu robnih vozlišč, medtem ko ima tlačni sistem enačb eno enačbo manj. Obe enačbi (3 in 6) lahko rešujemo z enakim algoritmom; v našem primeru z RBi-CGSTAB [4] algoritmom.

Kinetiko nestisljive tekočine opišemo z enačbo

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) = -\frac{1}{Re} \vec{\nabla} \times (\nabla \times \vec{\omega}). \quad (7)$$

V enačbi kinetike je Re Reynoldsovo brezdimenzijsko število. Sistem diskretiziranih enačb kinetike rešujemo z LSQR iterativnim algoritmom [2]. Paralelizacija enačb kinetike je trenutno v delu.

2.2 Izvedba

Prvi korak pri paralelizaciji je iskanje časovno in spominsko najbolj potratnih elementov v programu. V različnih numeričnih simulacijah v strojništву so ti elementi velike matrike ter iskanje rešitev matričnih enačb. V našem primeru rešujemo enačbo v obliki:

$$A \cdot x = b \quad (8)$$

V gornji enačbi je A neka poljubna velika in polna matrika, x vektor neznank in b vektor poznanih vrednosti. Pomembno je, da lahko tako sistem enačb kinematike (3), kot sistem enačb tlaka (6) zapišemo v tej obliki, kar nam omogoča paralelni izračun teh sistemov. Tako smo paralelizacijo izvedli na nivoju matrično vektorskih produktov, kot kaže slika 1.

Na začetku programa je potrebno vključiti knjižnico iz MPI standarda ter poiskati število procesorjev in njihove oznake, na katere se kasneje nasloni izvajanje programa v paralelnem načinu. To storimo z več ukazi:

```
include 'mpif.h'
integer myid, numprocs, ierr
call MPI_INIT(ierr)
call MPI_COMM_RANK(MPI_COMM_WORLD, myid, ierr)
call MPI_COMM_SIZE(MPI_COMM_WORLD, numprocs, ierr)
```

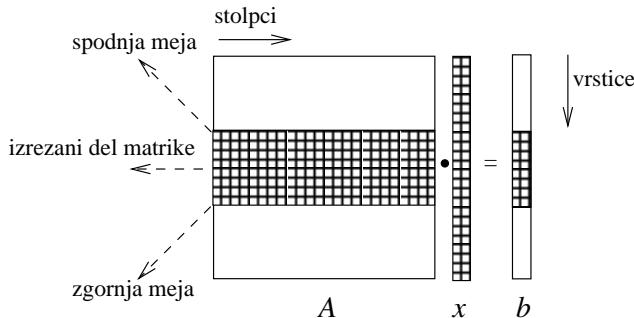
Ierr je koda za javljanje napake, *myid* je identifikacijska številka procesorja, *numprocs* pa je število procesorjev. Število procesorjev nastavimo ob zagonu programa v paralelnem načinu. Ko imamo osnovne parametre, lahko pričnemo s parallelizacijo programa. V našem primeru razdelimo matriko *A*. To razrežemo po vrsticah ter jo porazdelimo po procesorjih (slika 1). Npr. za neko število vrstic in stolpcev matrike *A*, bi razrez lahko izgledal nekako takole:

```
real*8, allocatable :: A(:, :)
integer spodnj, zgornj, stolpc, vrstice, ostanek, vrstice_par
c izračun števila vrstic za vsak procesor
    vrstice_par = int( vrstice / numprocs )
    ostanek = 0
        if ( vrstice .ne. (numprocs * vrstice_par) ) then
            ostanek = vrstice - (numprocs * vrstice_par)
        end if
c     prvi procesor
        if ( (myid.eq.0) .and. (numprocs.gt.1) ) then
            spodnj = 1
            zgornj = vrstice_par + ostanek - 1
c     samo, kadar imamo 1 procesor
        else if ( (myid.eq.0) .and. (numprocs.eq.1) ) then
            spodnj = 1
            zgornj = vrstice
c     vmesni procesorji
        else if ((myid.gt.0) .and. (myid.lt.(numprocs-1))) then
            spodnj = myid * vrstice_par + ostanek
            zgornj = (myid+1) * vrstice_par + ostanek - 1
c     zadnji procesor
        else if (myid.eq.(numprocs-1)) then
            spodnj = myid * vrstice_par + ostanek
            zgornj = (myid+1) * vrstice_par + ostanek
        end if
    allocate (A(spodnj:zgornj, stolpc))
```

Tako ima vsak procesor sedaj definirano svoje dvodimenzionalno polje. Paziti je potrebno, da tudi pri izračunu elementov matrike *A* upoštevamo spremenjeno velikost matrike. Po izračunu elementov dobimo enako število manjših matrik, kot je število procesorjev.

Za medsebojno komunikacijo vmesnih rezultatov smo uporabili naslednje ukaze:

```
CALL MPI_ALLREDUCE(poslji, prejmi, velikost, vrsta, op, comm, ierr)
CALL MPI_ALLGATHERV(poslji, velikost, vrsta, prejmi, velikost2, premik,
& vrsta2, comm, ierr)
CALL MPI_SENDRECV(poslji, velikost, vrsta, vir, oznaka, prejmi, velikost2,
& tip2, vir2, oznaka2, comm, ierr)
```



Slika 1 : Shematični prikaz matrično-vektorskega produkta. Šrafirani del označuje podatke enega procesorja, nešrafirani pa vse ostale podatke.

Parameter *poslji* vsebuje poslane podatke (lokralni rezultat), parameter *prejmi* pa prejete (globalni rezultat). *Velikost* pomeni število elementov v poslanih podatkih, *vrsta* pa njihov tip (integer, real ...). *op* je operacija, ki se naj izvrši nad podatki (npr. *MPI_SUM* za seštevanje; glej [1]). *premik* sporoči, kam so postavljeni podatki od vsakega procesorja. *Comm* je definiran v prvem parametru klicev na začetku programa.

Klic *MPI_ALLREDUCE* izvrši izbrano operacijo nad poslanimi podatki ter rezultat sporoči nazaj vsem procesorjem. Naslednji klic, *MPI_ALLGATHERV* zloži poslane podatke iz vseh procesorjev v vektor ter ga pošlje vsem procesorjem nazaj. Zadnji klic, *MPI_SENDRCV* pa nadomesča ukaza *MPI_SEND* in *MPI_RECV*; torej pošlje podatke naslednjemu procesorju in prejme podatke prejšnjega procesorja. V tem ukazu nastopa še parameter *oznaka*, kateri je neka poljubna konstanta tipa integer.

Ukaz, ki zaključi paralelni izračun je:

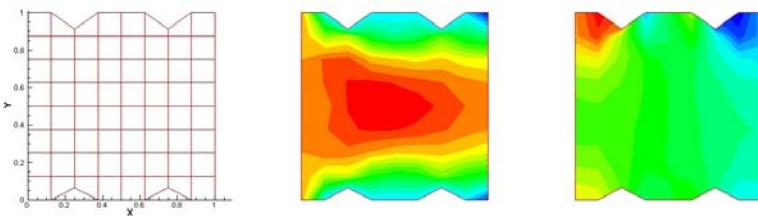
```
CALL MPI_FINALIZE( ierr )
```

V MPI standardu obstaja še cela vrsta drugih ukazov za medsebojno komunikacijo, katere lahko izberemo odvisno od primera.

3 Praktični primer

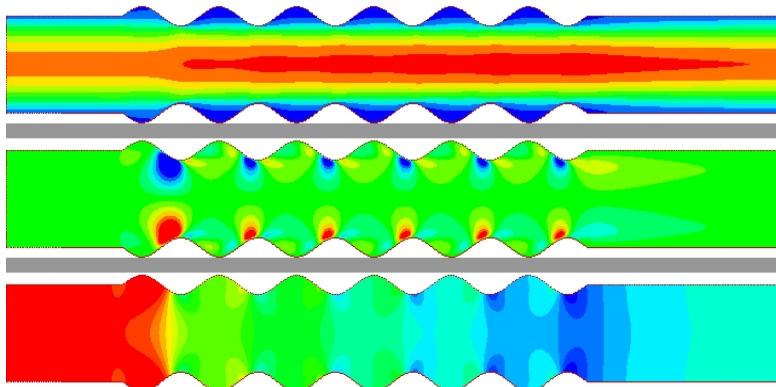
Sprva je bilo potrebno preveriti identičnost rezultatov serialne in paralelne kode. To smo preverili na preprosti geometriji, prikazani na sliki 2. Tok nestisljive izotermne tekočine teče skozi območje reševanja od leve proti desni. Na spodnji in zgornji steni je bil definiran brezdrsnii robni pogoj. Na vhodu je bila predpisana brezdimenzijska hitrost 1 tako, da je bilo Reynoldsovo število, definirano s polovično širino kanala enako 2. Na izhodu je bil predpisan odprtii robni pogoj. Rezultati so bili identični za vsa izračunana polja. S tem smo dokazali, da takšna oblika paralelizacije v ničemer ne spremeni končnega rezultata.

Za praktični primer smo izbrali valovit kanal [6], pri katerem smo uporabili tri mreže različnih gostot. Najredkejša je imela 7221 elementov, srednja 10824 in gosta 22311 elementov.



Slika 2 : Območje reševanja za preverbo identičnosti rezultatov; geometrija z mrežo (levo), poljem hitrosti v_x (sredina) in tlačnim poljem p (desno).

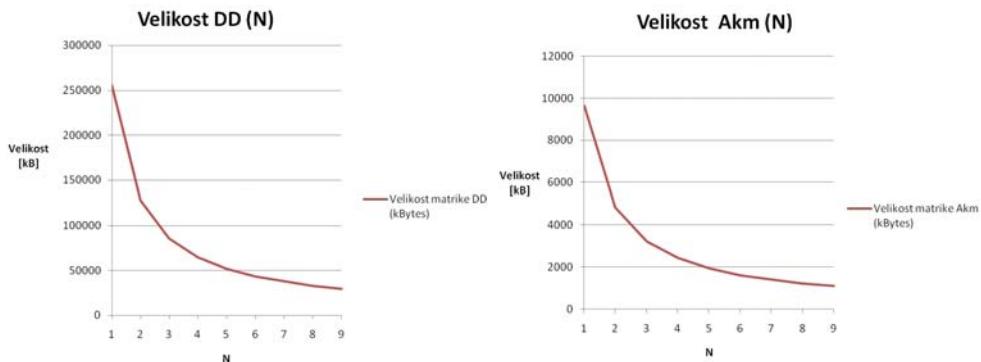
Robni pogoji so se od prejšnjega primera razlikovali le na vhodu v kanal, kjer je bil predpisani parabolični profil brezdimenzijske hitrosti z največjo vrednostjo 375 ter srednjo vrednostjo 250. Velikost Reynoldsovega števila je 500. Geometrija je prikazana na sliki 3. Pri tem primeru nas je zanimala pospešitev izračuna zaradi paralelizacije ter zmanjšanje porabe spomina na eni enoti (računalniku).



Slika 3 : Geometrija valovitega kanala uporabljena za primerjavo hitrosti izvajanja programa v paralelnem načinu; hitrostno polje v_x (zgoraj), hitrostno polje v_y (sredina) in tlačno polje p (spodaj). $Re = 500$.

Velikost potrebnega spomina je najbolj odvisna od največjih matrik. Tudi ostali deli programa imajo določene spominske zahteve, levji delež pa navadno nosi le majhno število velikih matrik. Zato smo opazovali le dve največji matriki (v našem primeru jih označimo z A_{km} in DD). Med njima je razlike za cel velikostni razred, kar potrjuje prešnjo trditev. Ker so matrike približno enakomerno razdeljene med procesorje, pričakujemo, da se bo njihova velikost enakomerno manjšala. Tako pričakujemo, da bo za 2 procesorja velikost potrebnega spomina za shranjevanje matrike padla na polovico začetne vrednosti, za 3 procesorje na tretjino ...

Grafi na sliki 4 prikazujejo odvisnost velikosti matrike DD in matrike Akm od porazdelitve izvajanja programa na N procesorjev.



Slika 4 : Odvisnost velikosti matrike DD (levo) ter matrike Akm (desno) od števila procesorjev za mrežo s 7221 elementi.

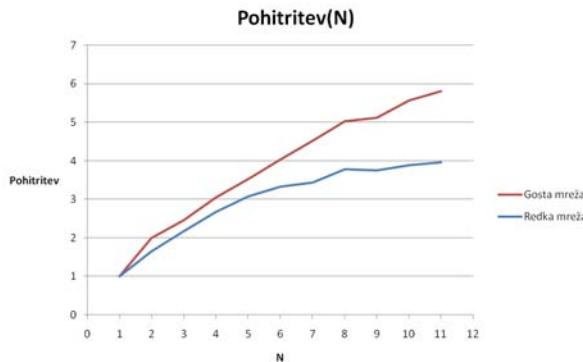
Iz grafov je razvidno monotono upadanje potrebe po spominu. Največji spomin, ki je potreben za izvajanje programa je sicer večji od velikosti matrike DD , vseeno pa je ta velikost dobra ocena uporabe spomina.

Za preverjanje pospešitve izračuna smo v programu BEMFLOW vklopili le paraleliziran del programa. Merili smo skupen čas ter čas, ki ga procesor porabi za računanje paralelnega reševanja tisoč iteracij enačb kinematike ter enačbe tlaka. Posamezni procesi morajo med izračunom komunicirati med seboj, kar upočasnuje izračun. Iz tega sledi, da je paralelno izvajanje programov smiselno le, če je čas računanja veliko večji od časa potrebnega za medsebojno komunikacijo. Če definiramo pohitritev izračuna kot razmerje med celotnim časom serijskega izračuna in celotnim časom paralelnega izračuna, lahko le-to grafično prikažemo. Graf na sliki 5 prikazuje pohitritev izračuna za primer redke in goste mreže v odvisnosti od števila procesorjev.

Pohitritev na majhnem številu procesorjev je skoraj linearна. Ko število procesorjev povečujemo, se razmerje med časom računanja in časom komunikacije slabša in pospešitev ni več linearна. S povečevanjem velikosti primera se pohitritev izboljša zaradi izboljšanja prej omenjenega razmerja.

4 Zaključek

Z naraščajočo kompleksnostjo problemov, katere rešujemo s pomočjo računalnika, naraščajo tudi potrebe po procesorski moči in spominu računalnika. Ko dosežemo meje spomina, ali pa postane reševanje problema preveč dolgotrajno, je ena izmed rešitev paralelizacija programa, katerega uporabljamo za reševanje problema. Navadno imamo opraviti z velikimi matrikami, katere je smiselno razdeliti na več delov. S tem sicer ne zmanjšamo potrebe po računalniškem spominu, ga pa razdelimo na več računalniških enot, kar je navadnoceneje od razširjanja spomina enega samega računalnika. Tudi čas reševanja se navadno skrajša. Pomembno je razmerje



Slika 5 : Odvisnost pohitritve izvajanja programa od števila procesorjev (N) za redko mrežo (7221 elementov) in gosto mrežo (22311 elementov).

med časom medsebojne komunikacije med posameznimi procesi in časom računanja. Parallelizacija je smiselna, kadar je čas računanja veliko daljši od časa komunikacije. Tako je učinek parallelizacije največji pri računsko zahtevnih problemih, medtem ko se lahko pri preprostih primerih čas reševanja celo podaljša.

Literatura

- [1] Message Passing Interface Forum. *MPI: A Message-Passing Interface Standard Version 2.1*. High-Performance Computing Center Stuttgart, 2008.
- [2] C. C. Paige in M. A. Saunders. LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 8:43–71, 1982.
- [3] J. Ravnik, L. Škerget in M. Hriberšek. 2D velocity vorticity based LES for the solution of natural convection in a differentially heated enclosure by wavelet transform based BEM and FEM. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 30:671–686, 2006.
- [4] G. L. G. Sleijpen in D. R. Fokkema. BICGSTAB(l) for Linear Equations Involving Unsymmetric Matrices with Complex Spectrum. *El. Trans. on Numerical Analysis*, 1:11–32, 1993.
- [5] L. Škerget, M. Hriberšek in Ravnik Z. Žunič. Natural convection flows in complex cavities by BEM. *Int. J. Num. Meth. Heat & Fluid Fl.*, 13:720–735, 2003.
- [6] C. C. Wang in C. K. Chen. Forced convection in a wavy-wall channel. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45(12):2587–2595, 2002.
- [7] Z. Žunič, M. Hriberšek, L. Škerget in J. Ravnik. 3-D boundary element-finite element method for velocity-vorticity formulation of the Navier-Stokes equations. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 31:259–266, 2007.



Numerično modeliranje sklopljenega primera naravne in prisilne konvekcije v toku mikropolarnih tekočin preko kotanje

M. Zadravec¹, M. Hriberšek² in L. Škerget³

Numerical modelling of mixed convection of micropolar fluid flow in cavity

Povzetek. V prispevku je predstavljen sklopljenega primera naravne in prisilne konvekcije v toku mikropolarnih tekočin preko kotanje. Glede na tok klasičnih tekočin, kjer je zajeto le translatorno gibanje delov tekočine, se v primeru mikropolarnih tekočin k translatornemu gibanju prišteva tudi gibanje tekočine zaradi rotacije togih nedeformabilnih delcev okrog središča določenega majhnega volumna, kar je opisano s pomočjo vektorja mikrorotacije. Numerično modeliranje dodatnih mikro vplivov se izvede z modificiranjem klasičnega sistema Navier-Stokesovih enačb, ki predstavljajo osnovno orodja za numerično simulacijo toka tekočine. Prispevek poda rezultate tokovnega, temperaturnega in mikrorotacijskega polja izračunanega z računskim algoritmom za reševanje modificiranih Navier-Stokesovih enačb s pomočjo metode robnih elementov (MRE), natančneje z Robno-območno integralsko metodo.

Abstract. The contribution deals with numerical simulation of mixed convection of micropolar fluid flow in cavity. In contrast to simple fluids, where only translational movement of material particles is accounted for, in micropolar fluids additional to the translational movement is also movement due to the rotation of rigid particles about the center of a small volume element, which is described by the micro-rotation vector. Thus the classical Navier-Stokes system of equations, which forms the basis for derivation of modern flow simulation tools, needs to be modified, to incorporate additional micro effects into the computational method. The submitted work presents results of flow, thermal and microrotation fields solved with a computational algorithm, based on the application of the Boundary Element Method (BEM) or Boundary Domain Integral Method to the modified Navier-Stokes equations.

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

² Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

³ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

1 Uvod

V naravi bomo zelo težko našli ločene primere, kjer bi bil tok mikropolarne tekočine le konvektivne oziroma difuzivne narave. Ponavadi se ukvarjamo s problemi, kjer nastopa problem mešane konvekcije, ki je sestavljena iz naravne konvekcije zaradi temperaturnih razlik in prisilne konvekcije. Tok mešane konvekcije oziroma sklopljen primer bo zajemal prisilno konvekcijo, povzročeno zaradi gnanega toka mikropolarne tekočine pri sobni temperaturi na vstopu v kotanjo, in naravno konvekcijo, kot posledico vnosa toplotnega toka na steni kotanje. Primer mešane konvekcije je zelo zanimiv, saj ga je mogoče zaslediti v mnogih praktičnih primerih, ki so povezani z mikro napravami, kot npr. hlajenje mikro elektronskih sistemov in naprav, ki jih je v zadnjem času na trgu in v praksi vedno več. Zaradi tega je smiselno uporabiti novo razviti numerični algoritem za reševanje toka mikropolarnih tekočin s pomočjo metode robnih elementov [7], pri čemer je zanimivo opazovati vpliv različnih snovskih lastnosti na tokovno dogajanje pri tako fizikalno kompleksnem primeru, kot je mešana konvekcija. Primer in geometrija, ki bo obravnavana, je bila izbrana na podlagi poznejše kvalitativne primerjave rezultatov z avtorji, ki so že izvedli nekaj izračunov mešane konvekcije za newtonske tekočine, in z rezultati za mikropolarne tekočine.

Matematični pristop reševanja problemov toka suspenzij s pomočjo teorije mikropolarnih tekočin je v svojem delu opisal Eringen [1]. V fizikalnem smislu so mikropolarne tekočine predstavljene kot tekočine z naključno orientiranimi suspendiranimi delci v viskozni tekočini za katere velja predpostavka, da se nederformabilni suspendirani delec v nekem majhnem volumnu tekočine, ki ga obkroža, vrta okoli središča tega elementa tekočine, kar opišemo z vektorjem mikrorotacije.

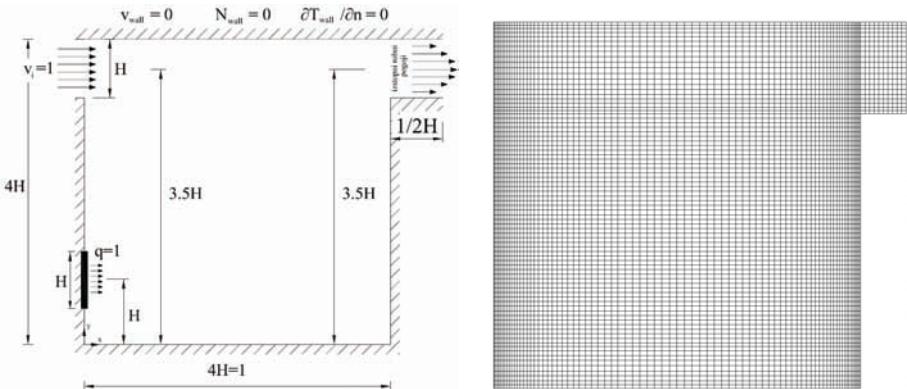
Tok mešane konvekcije je za mikropolarne tekočine v svojem delu predstavil Hsu [4]. Geometrijo problema, ki ga je preučeval, je povzel po delu Papanicolaoua [5], ki je opravil simulacijo za turbulentni tok newtonske tekočine. V prispevku je Hsu uporabil kotanjo z vstopom, na katerem je predpisal hitrost toka mikropolarne tekočine, kotanja je imela tudi izstop in lokalni izvor toplote. Rezultate izračuna za mikropolarne tekočine je primerjal z rezultati za newtonsko tekočino. Rezultati te raziskave kažejo, da je vpliv mikrostruktur na temperaturno in tokovno polje precej velik.

Inženirski problemi so v splošnem opisani z diferencialnimi enačbami, ki so zaradi svoje kompleksnosti rešljive le z aproksimativnimi metodami. Za reševanje smo uporabili metodo robnih elementov (MRE) oziroma njene razširitve, kjer je ena izmed njih robno območna integralska metoda (ROIM) [3], [6]. S pomočjo omenjene metode nam je uspelo razviti nov računski algoritmom za modeliranje mikropolarnih tekočin in uspešno rešiti nekatere tipične primere dinamike tekočin [8], [7].

2 Matematična formulacija

Za reševanje obravnavanega problema mešane konvekcije toka mikropolarne tekočine bomo uporabili numerični algoritem za reševanje tokov mikropolarnih tekočin z uporabo metode robnih elementov [8], [7]. Sam tok mikropolarne tekočine bo viskozen, nestisljiv in laminaren, ter ga lahko opišemo z ohranitvenimi enačbami zapisanimi za ravninski tok mikropolarne tekočine kot:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (1)$$



Slika 1 : Geometrija, robni pogoji in računska mreža primera mešane konvekcije v kotanji.

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + (\mu_v + k_v) \Delta \vec{v} + k_v \vec{\nabla} \times \vec{N} + \rho \vec{g} \beta_T (T - T_o), \quad (2)$$

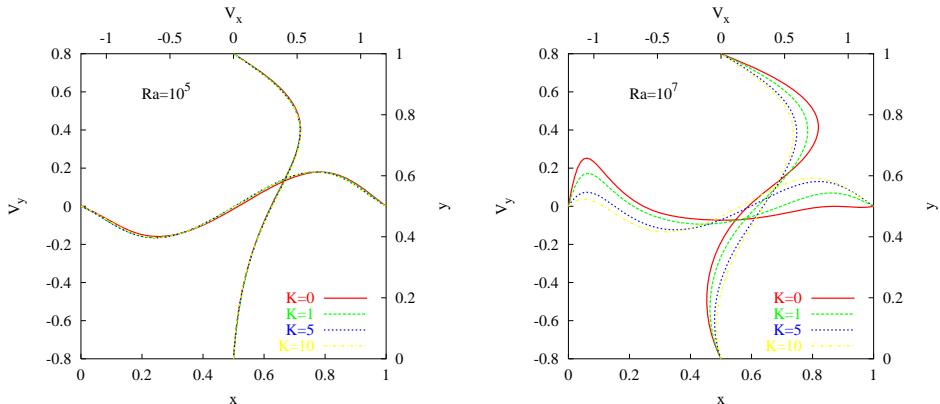
$$\rho j \frac{D\vec{N}}{Dt} = \gamma_v \Delta \vec{N} + k_v \vec{\nabla} \times \vec{v} - 2k_v \vec{N}, \quad (3)$$

$$c_p \rho \frac{DT}{Dt} = k \Delta T, \quad (4)$$

kjer diferencialni operator $D(\cdot)/Dt = \partial(\cdot)/\partial t + v_k \partial(\cdot)/\partial x_k$ predstavlja Stokesov snovski odvod, \vec{v} vektor hitrosti, p termodinamični tlak, \vec{N} vektor mikrorotacije, T temperaturo, β_T koeficient toplotne ekspanzije, \vec{g} vektor zemeljskega pospeška in T_o je referenčna temperatura. Predpostavimo, da so gostota ρ , specifična toplota na enoto mase c_p , koeficient prevoda toplote k in lastnosti mikropolarnih tekočin kot dinamična viskoznost μ_v , koeficient viskoznosti mikrorotacije k_v , koeficient gradijenta viskoznosti γ_v in mikrovztrajnost j konstantne vrednosti. Za uspešno implementacijo podanih enačb v hitrostno vrtinčno formulacijo Navier-Stokesovih enačb in uporabo aproksimacijske metode robnih elementov, vpeljemo vektor vrtinčnosti $\vec{\omega}$ in razdelimo dinamiko toka na kinematiko in kinetiko toka tekočine.

3 Opis reševanega problema

Obravnavali bomo tok mešane konvekcije za mikropolarne tekočine v pravokotni kotanji z dolžino in višino $4H$ (slika 1). Izvor toplote je podan na levi strani kotanje, na kateri je prav tako podan vstop tekočine v kotanjo, pri čemer je izstop iz kotanje predviden na desni strani. Vse podrobnosti geometrije so podane na sliki 1. Obravnavan model je ravinski model, pri čemer smo predpostavili dovolj veliko širino modela, da lahko obravnavamo primer kot dvodimensionalen. Zaradi enostavnosti sta vstop in izstop kotanje enakih višin kot je višina stene, na kateri je predpisana toplotni tok. Vse ostale stene so obravnavane kot adiabatne. Na vstopu je predpisana uniformna hitrost toka. Predpostavka je, da imamo stacionarni laminaren in nestisljiv tok mikropolarne tekočine. Na vseh trdnih stenah (vertikalne in horizontalne stene) je podan brezdrsni robeni pogoj za hitrosti ($v_x = 0$ in $v_y = 0$), razen, kot že omenjeno na vstopu



Slika 2 : Primerjava hitrostnih profilov v kotanji za različne vrednosti Ra števila in parametre mikropolarnih tekočin K .

in izstopu je bila podana hitrost drugače. Na vstopu imamo podani uniformni tok mikropolarne tekočine ($v_i = 1$). Za robni pogoj mikrorotacije smo upoštevali enačbo (5):

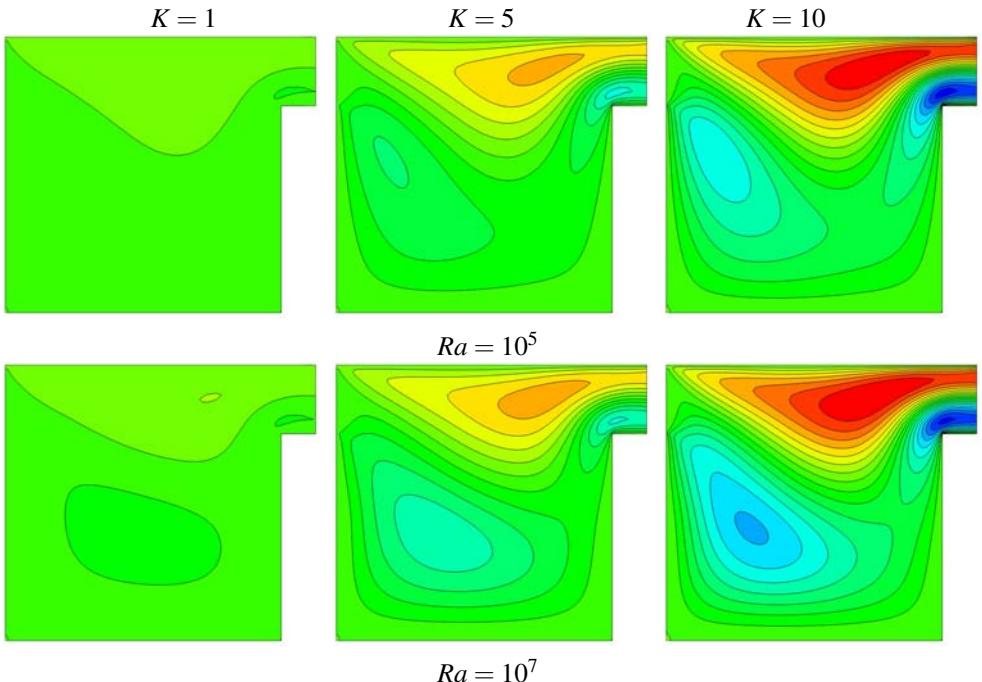
$$N_{wall} = n_{wall} \frac{\partial v_t}{\partial n} \quad 0 \leq n_{wall} \leq 1, \quad (5)$$

kjer je v_t tangentna hitrost in n predstavlja normalo. Vrednost koeficiente n_{wall} nam določa obnašanje mikrostruktur mikropolarne tekočine ob trdnih stenah, pri čemer smo v našem primeru uporabili $n_{wall} = 0$, kar nam predstavlja tok goste suspenzije (visoka koncentracija delcev). Na vstopu je predpostavljen robni pogoj za temperaturo $T = 0$, medtem ko je na vseh trdnih stenah predpostavljen adiabatni robni pogoj $\partial T / \partial n = 0$. Izvor toplote je predpisani z gostoto toplotnega toka $\partial T / \partial x = 1$. Na izstopu smo predpisali izstopne robne pogoje za funkcije tokovnega polja v obliku, da so odvodi funkcij tokovnega polja enaki nič. Za natančnejši izračun smo na izstopu uporabili kanal, ki ima dolžino $1/2$ vstopne višine v kotanjo. Izračun funkcij tokovnega polja smo izvedli s pomočjo diskretiziranega območja, kot je prikazano na sliki 1. Za vse simulacije je bila uporabljena računska mreža s 1650 podobmočji in 6771 računskimi vozlišči. V bližini sten smo uporabili zgoščevanje elementov k steni. S pomočjo tako izbrane računske mreže je bila zagotovljena pravilnost rešitve vše sprejemljivih računskih časih za dosego maksimalne predpisane napake iterativne rešitve (konvergenčni kriterij) 10^{-6} .

4 Rezultati numerične simulacije

Za preglednejše reševanje in urejanje numeričnih izračunov so bila uporabljena nekatera brezdimenzijska števila, ki opisujejo tokovno in temperaturno polje našega primera. Reynoldsovo število je bilo izračunano glede na vstopno višino v kotanjo $Re = v_i H / \mu_v$ in je znašalo v našem primeru za večino izračunov $Re = 100$, kar pomeni, da je tok laminaren. Prenos toplote znotraj mikropolarne tekočine je možno opisati s pomočjo Rayleighovega števila, ki je definirano kot produkt Grashofovega števila (razmerje med vzgonskimi in viskoznimi silami) in Prandtlovega

števila (razmerje med hidravlično in termično mejno plastjo oziroma povezava hitrostnega in temperaturnega polja). Vsi izračuni so bili izvedeni za Prandtlovo število $Pr = 10$.



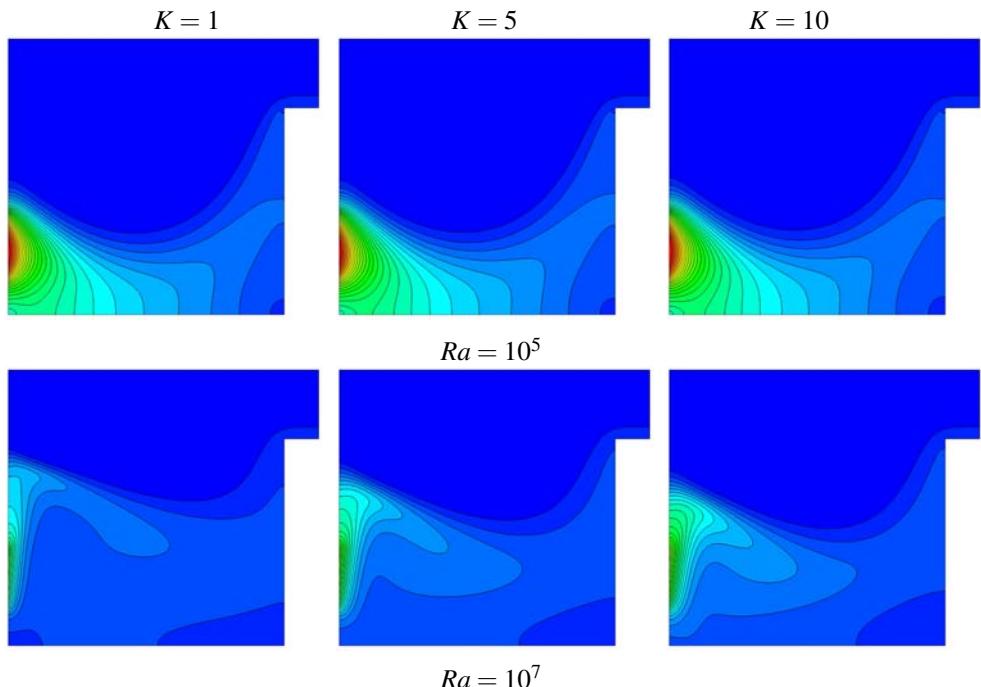
Slika 3 : Mikrorotacija v primeru mešane konvekcije v kotanji za različne vrednosti parametra mikropolarnih tekočin K in različne vrednosti Rayleighovih števil ($\lambda = 1$).

Pomembnega pomena v rezultatih bo parameter mikropolarnih tekočin K , ki nam bo podajal razmerje med koeficientom viskoznosti mikrorotacije k_v in dinamično viskoznostjo μ_v ($K = k_v/\mu_v$). Parameter mikropolarnih tekočin K smo spremenjeni z namenom pridobiti informacije vpliva na tokovno in toplotno obnašanja mikropolarnih tekočin. Pri obravnavi mikropolarnih tekočin se pojavi še en nov parameter λ , ki predstavlja kombinacijo med koeficientom viskoznosti mikrorotacije k_v in koeficientom gradijenta viskoznosti γ_v , ter vpliva na mikrorotacijo. Koeficient λ je enak nič v primeru, ko je enak nič koeficient viskoznosti mikrorotacije k_v . V primeru, ko koeficient λ narašča, se povečujejo tudi učinki mikrorotacije, še posebej v okolici sten. Koeficient λ je tako podan z izrazom, ki ga je predlagal Eringen [2]. Vrednosti parametra mikropolarnih tekočin so bile izbrane v območju $K = 0,1 - 10$ in vrednosti parametra $\lambda = 0,5 - 10$. Izračuni so bili izvedeni za različne vrednosti Rayleighovih števil v območju $Ra = 10^3 - 10^8$.

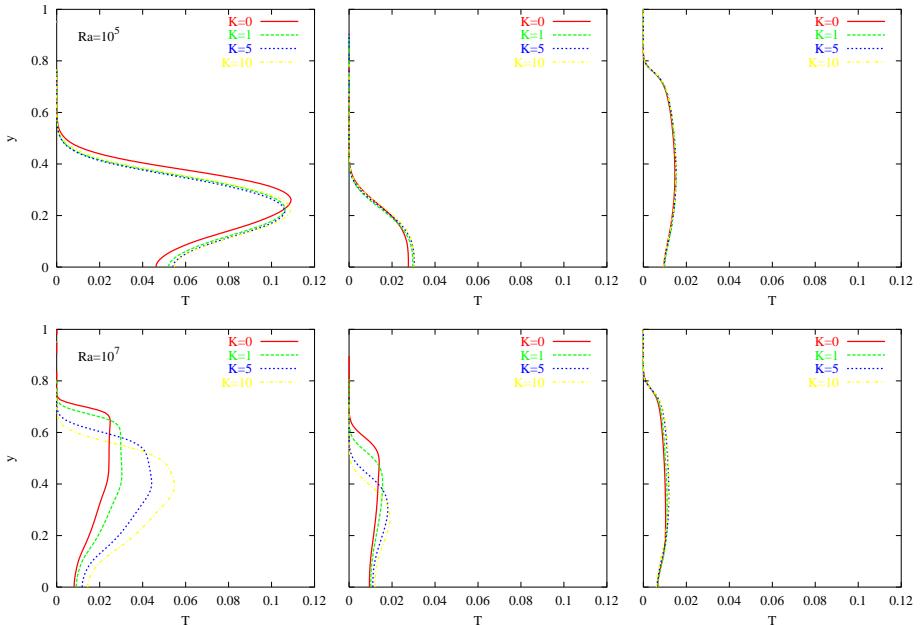
Na sliki 2 so prikazani profili hitrosti v kotanji za različne vrednosti Ra števila in parametre mikropolarnih tekočin K . Profil komponente hitrosti v_x je podan po vertikalni liniji v sredini kotanje ($x = 2H$) in profil komponente hitrosti v_y po horizontalni liniji v sredini kotanje

($y = 2H$). Rezultati hitrostnih profilov nam prikažejo izrazito povečanje povratnega toka znotraj kotanje s povečevanjem vrednosti Rayleighovega števila. Če pogledamo na rezultate s strani mikropolarnosti tekočine, se le ta povečuje s povečevanjem parametra mikropolarnih tekočin K , kar nam pri konstantni vrednosti Rayleighovega števila povzroči umirjanje toka v kotanji. Podobno lastnost umirjanja toka mikropolarne tekočine s povečevanjem vrednosti parametra mikropolarnih tekočin (K) smo ugotovili že v primeru naravne konvekcije v toku mikropolarnih tekočin v kotanji kvadratni kotanji [8]. Tako v primeru nižjih vrednosti Rayleighovih števil in višjih vrednostih parametra mikropolarne tekočine ni zaslediti povratnega toka v spodnjem delu kotanje. Tak pojav gibanja mikropolarne tekočine lahko pripisemo povečanju upora gibanju mikropolarne tekočine zaradi povišane mikrorotacije v kotanji (višja vrednost parametra mikropolarnih tekočin K oziroma višja vrednost koeficiente viskoznosti mikrorotacije k_v), ki s tem upočasnjevanjem toka tekočine zviša mejo za nastanek povratnega toka v kotanji.

Rezultati mikrorotacije so podani na sliki 3 za različne vrednosti Rayleighovih števil in parametra mikropolarnih tekočin ($K = 1, 5$ in 10), za konstantno vrednost Reynoldsovega števila ($Re = 100$). Povečevanje parametra mikropolarnih tekočin K dosegamo s povečevanjem koeficiente viskoznosti mikropolarne tekočine k_v , ki nam, kot je razvidno iz rezultatov izrazito povečuje mikrorotacijo mikropolarne tekočine v kotanji.



Slika 4 : Izoterme v primeru mešane konvekcije v kotanji za različne vrednosti parametra mikropolarnih tekočin K in različne vrednosti Rayleighovih števil Ra ($\lambda = 1$).



Slika 5 : Primerjava temperaturnih profilov v kotanji za različne vrednosti Ra števila in parametre mikropolarnih tekočin K .

Vpliv Rayleighovega števila za različne vrednosti parametra mikropolarnih tekočin na temperaturno polje je prikazan na sliki 4 pri vrednosti Reynoldsovega števila $Re = 100$. Iz slike je razvidno, da z naraščanjem Rayleighovega števila narašča temperaturni gradient v okolici izvora topote, pri čemer se povečuje gretje notranjosti kotanje. Na sliki 5, so podani priključni temperaturni profili v kotanji za rezultate na sliki 4. Temperaturni profili so za vsako od izbranih vrednosti Ra števila podani ločeno na treh različnih vertikalnih linijah. Rezultati leve kolone predstavljajo rezultate v bližini leve stene kotanje ($x = 0,05$), rezultati srednje kolone predstavljajo rezultate na vertikalni liniji po sredini kotanje ($x = 0,5$) in rezultati desne kolone predstavljajo rezultate na vertikalni liniji blizu leve stene kotanje ($x = 0,95$). Z naraščanjem parametra mikropolarnih tekočin K , kot je bilo to razvidno že iz prejšnjih rezultatov, se zmanjšuje intenziteta gibanja toka in s tem tudi intenziteta povratnega toka v okolici izvora topote. S tem zmanjšanjem gibanja toka se zmanjša tudi količina prenesene topote z izvora topote na okoliški tekočino, kar privede do povečanih temperatur v primeru višjih vrednosti parametra mikropolarnih tekočin. S povečevanjem vrednosti Ra števila narašča intenziteta gibanja tekočine v kotanji in se s tem poveča povratni tok v okolici izvora topote, kar pospeši prenos topote od izvora topote na okoliški fluid in pripelje do manjših temperatur na površini izvora topote, pri čemer pa se temperatura z oddaljevanjem od izvora topote zmanjšuje. Z povečevanjem vrednosti Ra števila pa se zaradi zmanjšanja temperature v ravnini izvora topote, povečuje temperatura v zgornjem delu kotanje, saj povečevanje vrednosti Ra števila poveča povratni tok in s tem odnaša več tekočine z večjo temperaturo iz spodnjega dela

kotanje v zgornji del kotanje. Vse navedene ugotovitve obnašanja mikropolarnih tekočin v primeru mešane konvekcije se kvalitativno ujemajo z rezultati predstavljenimi v delu Hsu-ja [4].

5 Zaključki

Primer modeliranja sklopljenega primera naravne in prisilne konvekcije v toku mikropolarnih tekočin preko kotanje, združuje vse funkcije novo razvitega numeričnega algoritma za računanje tokov mikropolarnih tekočin, saj se znotraj tega primera upošteva tako naravna konvekcija, do katere pride zaradi temperaturnih razlik v kotanji in prisilna konvekcija, ki je podana z vstopnim hitrostnim profilom v kotanjo. Rešitev tega primera nam kaže, da se s povečevanjem vrednosti Rayleighovega števila poveča tudi gibanje toka tekočine znotraj kotanje. Povečano gibanje privede do povratnega toka v okolici izvora topote. To povečanje gibanja toka znotraj kotanje pa privede do povečanega prenosa topote znotraj kotanje, in sicer od izvora topote proti notranjosti. S povečevanjem parametrov mikropolarne tekočine, kot sta parameter mikropolarne tekočine K in parameter λ , se tokovno polje v kotanji umirja in s tem se znižuje učinkovitost prenosa topote z izvora topote proti notranjosti kotanje, kar se odraža z naraščanjem temperature na mestu izvora topote.

Literatura

- [1] A.C. Eringen. Theory of micropolar fluids. *J Math Mech*, 16:1–18, 1966.
- [2] A.C. Eringen. *Microcontinuum Field Theories: II. Fluent media*. Springer Verlag, New York, 2001.
- [3] M. Hriberšek in L. Škerget. Boundary domain integral method for high reynolds viscous fluid flows in complex planar geometries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(39–41):4196–4220, 2005.
- [4] T.H. Hsu in S.G. Wang. Mixed convection of micropolar fluids in a cavity:. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43:1563–1572, 2000.
- [5] E. Papanicolau in Y. Jaluria. Computation of turbulent flow in mixed convection in a cavity with a localized heat source. *Journal of Heat Transfer*, 117:649–658, 1995.
- [6] L. Škerget, M. Hriberšek in G. Kuhn. Computational fluid dynamics by boundary-domain integral method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 46:1291–1311, 1999.
- [7] M. Zadravec. *Numerično modeliranje toka mikropolarnih tekočin z metodo robnih elementov*. Doktorska disertacija, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, 2009.
- [8] M. Zadravec, M. Hriberšek in L. Škerget. Natural convection of micropolar fluid in an enclosure with boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33:485–492, 2009.



Računalniško podprt razdeljevanje in vrednotenje domačih nalog pri mehaniki

B. Harl¹, M. Kegl¹

Computer supported distribution and assessment of homework assignments in mechanics

Povzetek. V prispevku je opisan način računalniško podprte izvedbe domačih nalog pri mehaniki z uporabo lastnega programskega paketa ASDN. Ta omogoča avtomatično generiranje individualnih domačih nalog, njihovo distribucijo preko elektronske pošte ter avtomatsko zbiranje in obdelavo rezultatov. Pozornost prispevka je usmerjena predvsem v delo učitelja oziroma asistenta pri pripravi in razpošiljanju nalog ter v delo študenta pri reševanju nalog in oddaji rezultatov preko spletnega vmesnika. Temu sledi kratek opis naših dosedanjih izkušenj in nekaj zamisli za razvoj sistema ASDN v prihodnosti.

Abstract. The paper describes a way of computer supported realization of homework assignments in mechanics by using our own software package ASDN. This package enables automatic generation of individual homeworks, their distribution via e-mail and automatic collecting and processing of results. Attention is mainly focused on the work of the teacher or assistant related to the preparation and distribution of homeworks as well as on the student's work related to homework solving and returning the results via a web interface. This is followed by a short description of our current experiences and some of our intentions of future development of the ASDN system.

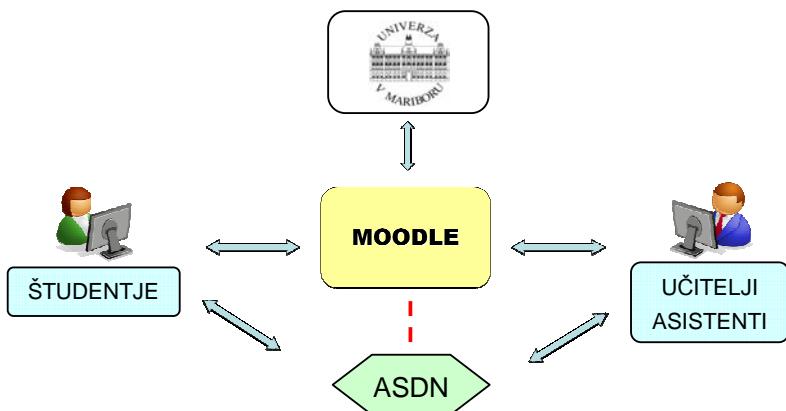
1 Uvod

V okviru Bolonjskega študija študentom del ocene izpita prinese individualno delo. Ta del se velikokrat izvaja v obliki domačih nalog. Pri tem si seveda želimo, da bi študentje svoje naloge reševali sami, brez prepisovanja od sošolcev. Izkušnje kažejo, da to lahko dosežemo le, če študentje dobijo individualne naloge, ki se med seboj ločijo po vsebinu in podatkih. Tukaj pa se zaplete, če imamo opravka z veliko skupino študentov, ki bi naj reševali relativno kompleksne naloge (kot jih imamo pri pouku mehanike). V tem primeru je od pedagoškega osebja nemogoče pričakovati, da bi se priprava in ocenjevanje nalog vršila 'ročno' – to bi preprosto zahtevalo prevelike napore in preveč časa.

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

V zadnjih letih smo bili priča precejšnjemu razvoju e-izobraževanja, ki je postal veljaven in realno izvedljiv način učenja. Bistvo tega je, da je učni proces v pretežni meri podprt z računalnikom in lahko zajema kombinacijo velikega števila didaktičnih oblik: samostojno učenje, individualne ali skupinske naloge, preverjanje znanja, simulacije, virtualni seminarji in podobno. Lahko je izvedeno na daljavo ali pa v učilnici ob osebni prisotnosti učitelja in študentov. Za namene e-izobraževanja so v Centru za e-izobraževanje in vseživljenjsko učenje Univerze v Mariboru implementirali okolje Moodle. Moodle omogoča vodenje evidenc študentov, izvajanje utrjevanja znanja ali izpite v obliki kviza, pošiljanje nalog študentom in še marsikaj.

Tudi učitelji in asistenti za mehaniko smo hoteli domače naloge organizirati in izvesti preko Moodla. Pri tem se je izkazalo, da Moodle ni ravno optimalna rešitev za veliko število študentov in za predmet kot je mehanika. Sicer je možno generirati individualne podatke in jih tudi avtomatsko vrednotiti, vendar so možnosti za izdelavo 'kode', ki naloge rešuje skrajno omejene. Razen tega tudi nismo videli možnosti za naključno razdeljevanje nalog, ki se ne ločijo le po podatkih, ampak tudi po vsebini. Na koncu nas je motilo tudi to, da Moodle naloge in pripadajočo 'kodo' shranjuje v svojem formatu nad katerim nimamo nadzora. To se lahko izkaže za zelo neugodno pri zamenjavi informacijskega sistema.



Slika 1: Na ASDN lahko gledamo kot na zelo praktičen dodatek k sistemu Moodle

Zaradi navedenih neprijetnosti smo se odločili za izdelavo lastnega programskega paketa, ki bi omogočal upravljanje z domačimi nalogami tako, kot smo si to zamislili in želeli. Odločitev za to je precej olajšalo dejstvo, da imamo danes na voljo profesionalna razvojna okolja, ki omogočajo relativno enostaven razvoj programske opreme z zahtevnimi uporabniškimi vmesniki, uporabo komunikacije med računalniki, uporabo interneta in tako naprej. Tako smo od začetne ideje upravljanja domačih nalog s pomočjo Moodle prišli do lastnega sistema ASDN (Avtomatski Sistem Domačih Nalog), ki je narejen v jeziku C# s pomočjo MS Visual Studio 2008. ASDN omogoča avtomatično generiranje individualnih domačih nalog, njihovo distribucijo preko elektronske pošte ter avtomatsko zbiranje in obdelavo rezultatov. Pri tem je potrebno poudariti, da je ASDN načelno samostojen sistem, ki je usmerjen predvsem v domače naloge. Zaradi tega gledamo nanj kot na zelo praktičen dodatek k centralnemu univerzitetnemu sistemu Moodle, slika 1.

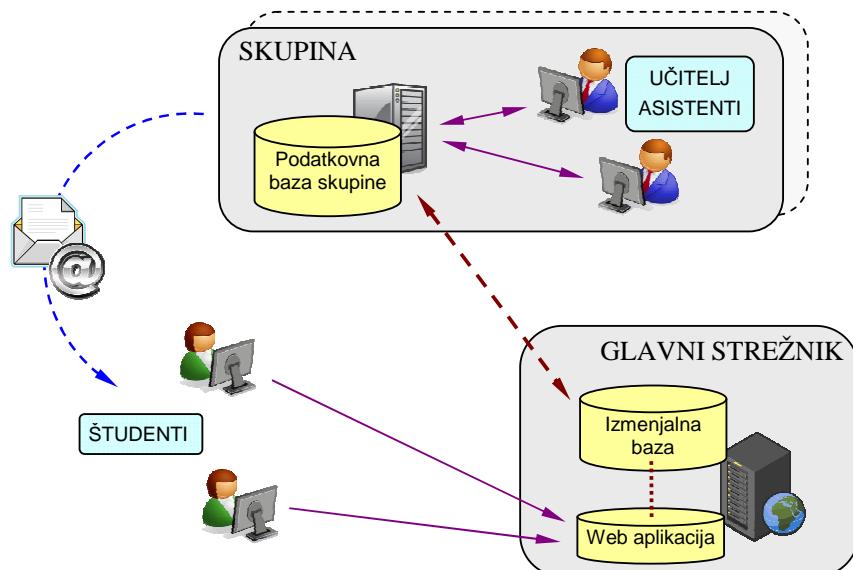
2 Izhodišča in shema sistema ASDN

Sistem ASDN smo si zamislili kot programsko okolje, ki bi omogočalo računalniško podporo predvsem pri naslednjih avtomatiziranih delih:

- generiranje individualnih nalog (naključni podatki in vsebine),
- distribucija nalog preko elektronske pošte,
- zbiranje rezultatov in polnjenje podatkovne baze.

Ko je bil sistem v osnovi postavljen, pa smo ugotovili, da mu lahko zlahka priključimo še naslednje koristne funkcije:

- vodenje celotnih evidenc (domače naloge, seminarji, kolokviji in izpiti) za študente,
- informiranje študentov preko elektronske pošte (zbrane točke domačih nalog, rezultati kolokvijev, izpitov, obvestila in podobno) – sistem lahko za vsakega študenta ciljne skupine oblikuje individualno sporočilo z njegovimi podatki iz podatkovne baze.

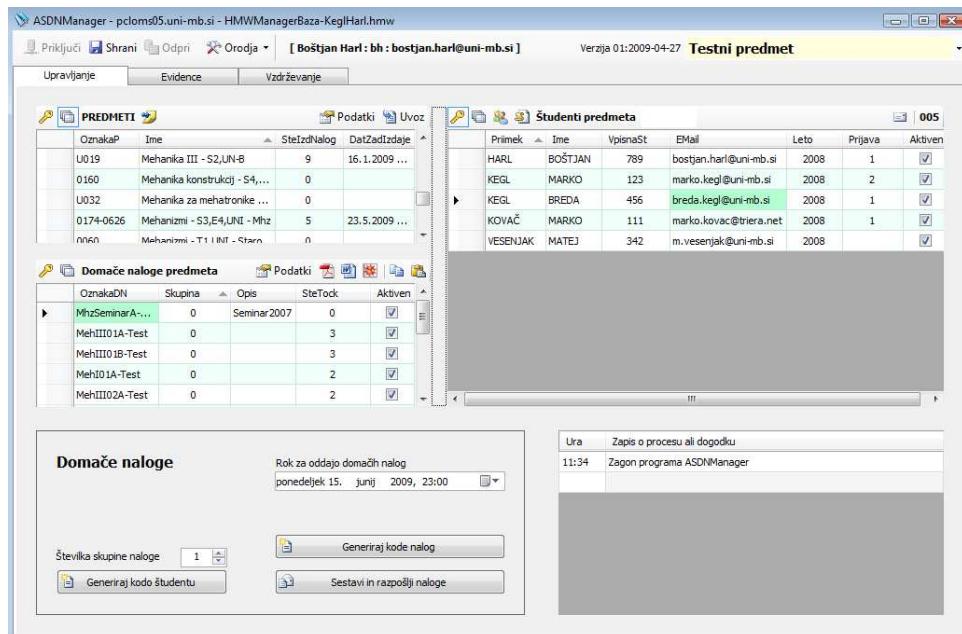


Slika 2: Zgradba aplikacije

Osnovo sistema predstavlja skupina učitelj/asistenti, ki uporablja svojo skupno podatkovno bazo, slika 2. Takšnih skupin je seveda lahko poljubno mnogo. Aplikacija, ki skrbi za podatkovno bazo skupine, komunicira z glavnim strežnikom. Na glavnem strežniku je nameščena izmenjalna baza in njena strežna aplikacija, ki skrbi za izmenjavo podatkov o

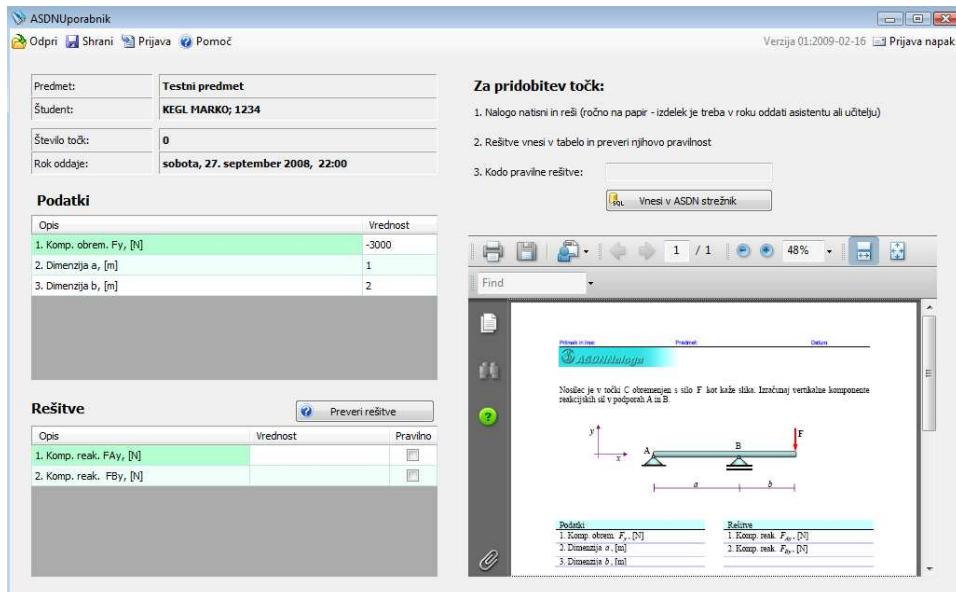
rezultatih oddanih nalog. Na skupnem centralnem strežniku je nameščena tudi spletna aplikacija, preko katere študentje oddajo svoje naloge.

Učitelji in asistenti skupine do svoje podatkovne baze dostopajo z običajno Windows aplikacijo *ASDNManager*, s katero tudi upravljajo z domačimi nalogami. Glavno okno te aplikacije prikazuje slika 3.



Slika 3: Glavno okno aplikacije *ASDNManager* za učitelje/asistente

Študent dobi domačo nalogo po elektronski pošti, slika 2. Za odpiranje domače naloge in preverjanje izračunanih rezultatov mora imeti nameščeno Windows aplikacijo *ASDNUporabnik*. Ko nalogo uspešno reši (ko so vse izračunane vrednosti pravilne), dobi kodo, ki jo odda preko ustrezne spletne strani (dostop do strežnika je možen direktno iz programa *ASDNUporabnik*). Glavno okno aplikacije *ASDNUporabnik* je prikazano na sliki 4.



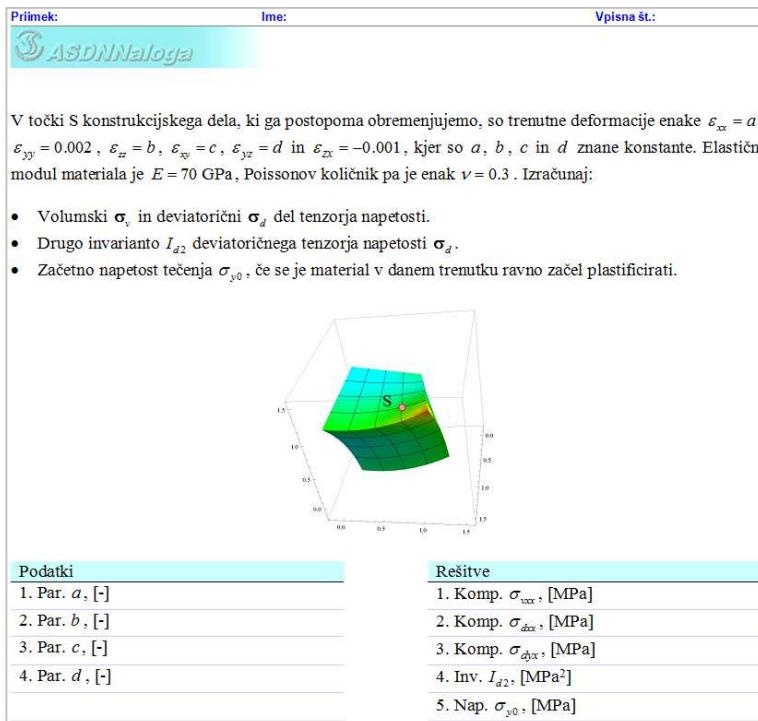
Slika 4: Glavno okno aplikacije *ASDNUporabnik* za študente

3 Priprava nalog

Zgoraj opisana shema zahteva seveda ustrezno pripravo domače naloge. Ta zajema 3 korake, in sicer:

- priprava besedila in skic naloge v PDF formatu,
- izdelava kode, ki rešuje ta tip naloge in
- primerna izbira spodnjih in zgornjih mej podatkov ter toleranc za rešitve.

Kar se tiče priprave besedila trenutno za to uporabljamo MS Word (in ustrezno šablono za zagotavljanje skladnega izgleda nalog). Izvoz v PDF format se nato naredi z uporabo ustreznega 'tiskalnika' kot je na primer *PDFCreator*. Podatki v nalogi so podani parametrično (torej ne s številkami). Pomemben sestavni del besedila naloge sta preglednici, ki jasno podajata kaj so podatki naloge in kaj pričakovane rešitve. Primer naloge prikazuje slika 5.



Slika 5: Primer ASDN naloge

Rešitev naloge mora za poljubne podatke izračunati računalnik, kar pomeni, da moramo napisati ustrezeno programsko kodo. Tukaj so možne razne variante, vendar daleč največ uporabljamo to, ki temelji na uporabi *Mathematice* in paketa *AceGen* [1]. V tem načinu kodo za reševanje naloge pripravimo v *Mathematici* nato pa to s pomočjo paketa *AceGen* predelamo v C# kodo. Ta koda se potem vnese v DLL knjižnico *ASDNSolver*. Postopek lahko torej grafično predstavimo nekako tako:

$$\text{Mathematica} \Rightarrow \text{AceGen} \Rightarrow \text{C\# koda} \Rightarrow \text{ASDNSolver}$$

Rutino za reševanje je torej treba izdelati v jeziku C# in jo dodati DLL knjižnici sistema ASDN. Ker se zavedamo, da se zdi mnogim pisanje kode v C# težavno, imamo pripravljen tudi drug scenarij, kjer bi učitelj formule za reševanje naloge napisal v bolj intuitivni obliki (sintaksa bi bila podobna tisti v *Mathematici*), izračunaval pa bi jih v ta namen narejen razčlenjevalnik (parser). Slednjega imamo že narejenega, vendar te opcije do sedaj nismo implementirali, in sicer preprosto zato, ker jo nihče ni potreboval.

Ko je koda za reševanje naloge narejena, nam preostane le še, da določimo zgornje in spodnje meje za podatke ter določimo tolerance zahtevanih rešitev. Spodnje in zgornje meje rabi generator naključnih števil, pri določanju podatkov za posameznega študenta. Tolerance

pa so potrebne za računalniško ugotavljanje pravilnosti numeričnega rezultata. Meje in tolerance vnesemo preko *ASDNManagerja*, shranijo pa se v podatkovni bazi skupine.

4 Reševanje nalog

Za reševanje naloge potrebuje študent

- aplikacijo *ASDNUporabnik*,
- program *Adobe Reader* in
- internetno povezavo.

Aplikacija *ASDNUporabnik* omogoča odpiranje datoteke domače naloge in preverjanje dobljenih rešitev, slika 4. Kar se tiče preverjanja pravilnosti rešitev zaenkrat (namerno) nimamo vgrajenih nobenih omejitev, se pa to lahko spremeni, če se bomo odločili drugače. Ko študent vse zahtevane rešitve pravilno izračuna, dobi unikatno kodo, ki jo mora oddati preko spletnega vmesnika. Vmesnik za oddajo kode je zelo enostaven – vsebuje samo vnosno polje za kodo in gumb za potrditev vnosa, slika 6. Kodo pravilne rešitve je možno oddati samo v predpisanim roku.

The screenshot shows a web page titled 'ASDN System' with the subtitle 'Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, Smetanova 17, 2000 Maribor'. The main content area is divided into two sections:

- Vnos kode rešitve domače naloge**: This section contains three numbered instructions:
 1. V prazno polje vpisi kodo pravilne rešitve
 2. Klikni vnesi (samo 1-krat)
 3. Poškrij na rezultat (odgovor strežnika)A text input field is followed by a 'Vnesi' button.
- Prijava email adrese za obvestila in domače naloge**: This section includes:
 - Status: Stanje števca: 0000
 - Instructions for email submission: 'Adreso prijavimo samo enkrat - pred začetkom pošiljanja domačih nalog. Pazite na točnost podatkov - posledica netočnih podatkov bo neuspešna prijava.'
 - Input fields for 'Vpisna številka', 'Priimek', 'Ime', and 'EMail'.
 - A 'Prijava' button.
 - Status: 'Prijava uspešna na strežniku'

Slika 6: Spletni vmesnik za oddajo kode rešitve domače naloge

Ko je koda oddana, sistem ASDN poskrbi za avtomatičen vnos rešitve v ustrezno podatkovno bazo skupine učitelj/asistent. Ko torej učitelj odpre svojo podatkovno bazo, so oddane naloge že vnesene in točkovane. Kljub temu od študentov zahtevamo, da domačo

nalogu natisnejo na papir, jo lastnoročno rešijo in svoj pisni izdelek oddajo učitelju ali asistentu. To je eden od ukrepov, s katerim želimo zmanjšati nezaželene načine reševanja nalog (uporaba tuje kode za izračun rešitev naloge, ...).

5 Izkušnje in smernice za naprej

Računalniško podprt razdeljevanje in vrednotenje domačih nalog pri mehaniki izvajamo dve leti. Ugotovitve kažejo, da je takšen način izvedbe individualnega dela za večino študentov zanimiv in ga tudi podpirajo. Sami si izbirajo čas in mesto reševanja nalog. Dobro se jim tudi zdi, da lahko sproti preverjajo pravilnost delnih rezultatov in da na koncu kodo rešitve preprosto oddajo preko spletnega vmesnika.

Tudi za učitelje in asistente je takšno delo z domačimi nalogami zelo enostavno, saj je praktično vse (razen izdelave nalog) avtomatizirano. Res je sicer, da izdelava naloge zaradi programiranja rutine za reševanje zahteva nekoliko več časa, vendar se naloga doda knjižnici, ki je tako iz leta v leto večja. Računamo, da bomo imeli v nekaj letih narejenih dovolj nalog, da izdelava novih ne bo več potrebna.

Težavo pa opažamo pri zagotavljanju samostojnega reševanja nalog. Eden od ukrepov za zmanjšanje nezaželene pomoči sošolcev je ta, da se naloge praviloma pošiljajo v petek, tako da jih morajo študenti reševati čez konec tedna. Skrajni rok za oddajo rešitve pa je običajno v nedeljo zvečer. S tem želimo zagotoviti minimalne stike med študenti v času reševanja. Opažamo, da tak ukrep še kar dobro deluje v prvem letniku, ko se študentje med seboj še ne poznajo dovolj dobro. V višjih letnikih pa se znajo študentje že mnogo bolje 'organizirati'. Pri predmetih mehanike jih namreč navajamo na uporabo raznih programskih orodij, kot je na primer *Mathematica*. Tako nekateri študenti dokaj hitro osvojijo osnove programiranja in 'pomagajo' reševati naloge drugim, tudi z razpečevanjem kode za reševanje naloge. Da bi takšno pomoč minimizirali, pripravimo za vsako domačo nalogu nabor vsebinsko podobnih, vendar različnih nalog. *ASDNManager* za vsakega študenta naključno izbere eno od teh nalog in zanjo tudi naključno izbere vhodne podatke. Na ta način koda, ki reši nalogu nekega študenta, običajno ni uporabna za nalogo, ki jo je dobil njegov sošolec.

Ker se zavedamo, da nedovoljene pomoči sošolcev verjetno nikoli ne bomo povsem preprečili, razmišljamo o prijemih, ki bi med študente vpeljali neke vrste konkurenčnost – pomoč drugemu bi morala biti v lastno škodo. Trenutno se nam zdi, da bi to lahko dosegli z vpeljavo variabilnega ocenjevanja nalog glede na relativno uspešnost študenta. Slednja bi se lahko merila s časom, ki ga je študent porabil za reševanje naloge. Najboljšim (najhitrejšim) študentom, bi tako dali dodatne točke, najslabšim pa bi jih nekaj odvzeli. Izračun točk bi se torej opravil šele potem, ko bi se rok za oddajo nalog iztekel in bi imeli vse podatke že v bazi. Obvestila študentom o doseženih točkah pa bi po novem vsebovala tudi mesto, ki ga je študent dosegel.

Literatura

- [1] J. Korelc, *Automatic generation of finite-element code by simultaneous optimization of expressions*. Theoretical Computer Science, 187 (1-2), 231-248, 1997.



Vpliv gibajočih se teles na gradbene konstrukcije

P. Češarek¹, M. Saje¹ in D. Zupan¹

Impact of moving bodies on structures

Povzetek. Predstavljen je matematični model gibanja togih teles po poljubnem togem reliefu ali konstrukciji v prostoru. Togo telo poljubne oblike nadomestimo s kroglo in izpeljemo enačbe trka s podlago ter zapišemo pogoje za prehod iz faze poskakovanja v kotaljenje. Rezultate prikazujemo v obliki grafov in animacij v trirazsežnem prostoru. Uporaba programa je prikazana na primeru gibanja krogle na strmem pobočju.

Abstract. Mathematical model of rigid body motion on a rigid rough surface or structure in space is developed. Rigid bodies of different shapes are replaced with a sphere. The equations of collision are given, as well as switching conditions from phase of bouncing to rolling on a rigid rough surface. The results are shown in a form of diagrams and animations. The application consist of example of sphere motion on a steep slope.

1 Uvod

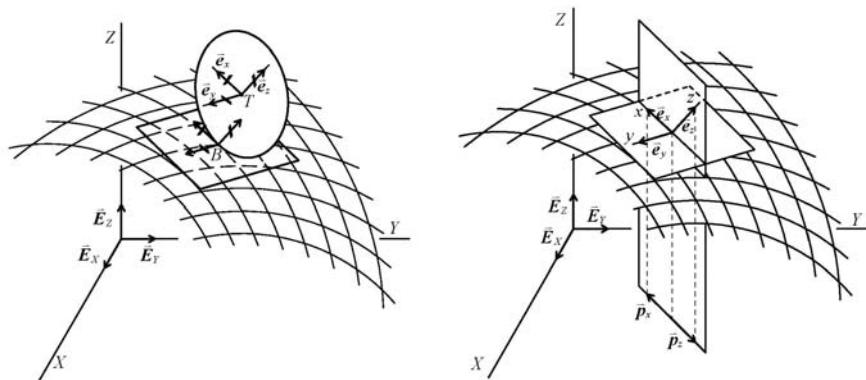
V članku predstavljamo modeliranje vpliva gibajočih se teles na gradbene konstrukcije. Tipično gibanje je sestavljeno iz prostega leta, trkov s podlago in kotaljenja ali drsenja po podlagi ter prehodov med posameznimi fazami. Posebej zanimiv in pomemben je trk teles ob konstrukciji. Omejimo se na obravnavo togih teles in toge podlage ali konstrukcije. V članku podajamo osnovne enačbe trka krogle s polmerom a in maso m ob podlago, jih rešimo, numerične simulacije pa opravimo s programom [1] zapisanim v okolju *Matlab*. V primerih posebej obravnavamo pogoje prehoda iz faz leta in trka v kotaljenje.

2 Osnovne enačbe trka krogle s podlago

Kroglo postavimo v trirazsežni prostor (X, Y, Z) . Lokalni koordinatni sistem (x, y, z) , v katerem zapišemo enačbe gibanja med trkom, je definiran z lego tangentne ravnine v točki

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

dotikaljšča krogla in podlage (slika 1). Gibalne enačbe krogla za obdobje trka izpeljemo iz izrekov o gibalni in vrtilni količini.



Slika 1: Koordinatni sistemi

Upoštevamo standardne predpostavke teorije trka togih teles [2]:

- (i) *Trajanje trka je tako kratko, da smemo vzeti, da se lega kroglice med trkom ne spremeni.*
- (ii) *Med trkom so trčne sile (v dotikaljšču krogla in podlage B) tako velike, da lahko vse ostale sile v primerjavi z njimi zanemarimo.* Namesto trčnih sil vpeljemo njihove impulze: $dp_x = R_x dt$, $dp_y = R_y dt$, $dp_z = dp = R_z dt$ oziroma $dp_T = T dt$ in $dp_N = dp = N dt = R_z dt$.
- (iii) *Kroglica in podlaga se med trkom ne deformirata. Stiskanje (kompresijo) in razmikanje (restitucijo) teles ob trku prevzame fiktiven deformabilen delec na stiku obeh teles.* Deformabinost, elastičnost in plastičnost podlage in kroglice so opisane samo z enim parametrom – s koeficientom trka “ e ”.

Izreka o gibalni in vrtilni količini za obdobje trka zapišemo kot

$$\begin{aligned} m dv_x &= R_x dt = dp_x, \\ m dv_y &= R_y dt = dp_y, \\ m dv_z &= R_z dt = dp_z \end{aligned} \quad (2)$$

in

$$\begin{aligned} A(d\Omega_x) &= a R_y dt = a dp_y, \\ A(d\Omega_y) &= -a R_x dt = -a dp_x, \\ A(d\Omega_z) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

V izrekih (2) in (3) so v_x , v_y in v_z težiščne hitrosti krogle, Ω_x , Ω_y in Ω_z pa komponente vektorja telesne kotne hitrosti, A je vztrajnostni moment krogle. Vse količine so izražene glede na lokalne koordinatne osi x, y, z .

V začetku trka ima hitrosti delca kroglice v dotikališču komponento v tangentni ravnini različno od nič, zato kroglica v začetku trka navadno drsi, kasneje se lahko zgodi, da hitrost delca v dotikališču doseže vrednost nič in kroglica preneha drseti. Obe vrsti gibanja med trkom zato obravnavamo posebej. Z μ_T označimo koeficient trenja med trkom, kadar kroglica drsi upoštevamo dinamični koeficient trenja μ_{Td} , sicer pa statičnega μ_{Ts} .

2.1 Trk z drsenjem

Med drsenjem sta normalna in tangencialna trčna sila v dotikališču povezani s Coulombovim zakonom trenja, ki ga zapišemo z impulzoma obeh sil

$$p_T = \mu_{Td} p. \quad (4)$$

Gibalne enačbe ob upoštevanju vezne enačbe (4) zapišemo z novimi količinami: silo trenja T , kotom α , ki ga T oklepa z R_x in hitrostjo delca v dotikališču v_B . Pri tem je: $R_x = T \cos \alpha$, $R_y = T \sin \alpha$, $v_x = -v_B \cos \alpha + a\Omega_y$ in $v_y = -v_B \sin \alpha - a\Omega_x$. Izraze upoštevamo v izrekih (2) in (3)

$$\begin{aligned} -\cos \alpha \frac{dv_B}{dp} + v_B \sin \alpha \frac{d\alpha}{dp} + a \frac{d\Omega_y}{dp} &= \frac{\mu_{Td}}{m} \cos \alpha, & \frac{d\Omega_x}{dp} &= \frac{\mu_{Td} a}{A} \sin \alpha, \\ -\sin \alpha \frac{dv_B}{dp} - v_B \cos \alpha \frac{d\alpha}{dp} - a \frac{d\Omega_x}{dp} &= \frac{\mu_{Td}}{m} \sin \alpha, & \frac{d\Omega_y}{dp} &= -\frac{\mu_{Td} a}{A} \cos \alpha, \\ \frac{dv_z}{dp} &= \frac{1}{m}, & \frac{d\Omega_z}{dp} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Osnovne neznanke sistema enačb trka s podrsavajem so tako: v_B , α , v_z , Ω_x , Ω_y in Ω_z . Začetni problem (5), ki ga rešujemo ob začetnih pogojih: $v_B(p_0) = v_B^0$, $\alpha(p_0) = \alpha^0$, $v_z(p_0) = v_z^0$, $\Omega_x(p_0) = \Omega_x^0$, $\Omega_y(p_0) = \Omega_y^0$ in $\Omega_z(p_0) = \Omega_z^0$, je analitično rešljiv in ima rešitev

$$\begin{aligned} v_B(p) &= v_B^0 - p \mu_{Td} \left(\frac{1}{m} + \frac{a^2}{A} \right), & \Omega_x(p) &= \Omega_x^0 + p \sin \alpha^0 \frac{\mu_{Td} a}{A}, \\ v_z(p) &= v_z^0 + \frac{p}{m}, & \Omega_y(p) &= \Omega_y^0 - p \cos \alpha^0 \frac{\mu_{Td} a}{A}, \\ \alpha(p) &= \alpha^0, & \Omega_z(p) &= \Omega_z^0. \end{aligned} \quad (6)$$

Ovisne količine v_x , v_y , p_T , p_x , p_y pri trku z drsenjem pa določimo s pomočjo enačb: $v_x = -v_B \cos \alpha + a\Omega_y$, $v_y = -v_B \sin \alpha - a\Omega_x$, $p_T = \mu_{Td} p$, $p_x = p_T \cos \alpha$, $p_y = p_T \sin \alpha$.

2.2 Trk brez drsenja

Pri trku brez drsenja je tangentna hitrost delca v dotikališču enaka nič: $v_{Bx} = v_x - a\Omega_y = 0$ in $v_{By} = v_y + a\Omega_x = 0$. Težiščni hitrosti v_x in v_y sta tako enaki

$$v_x = a\Omega_y, \quad v_y = -a\Omega_x. \quad (7)$$

Vezni enačbi (7) zapisani v diferencialni obliki dodamo k izrekoma o gibalni in vrtilni količini (2) in (3). Sistem enačb trka brez drsenja z osnovnimi neznankami: v_x , v_y , v_z , Ω_x , Ω_y , Ω_z , p_x , p_y , tako dobi obliko

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dp} &= \frac{1}{m} \frac{dp_x}{dp}, & A \frac{d\Omega_x}{dp} &= a \frac{dp_y}{dp}, & \frac{dv_x}{dp} &= a \frac{d\Omega_y}{dp}, \\ \frac{dv_y}{dp} &= \frac{1}{m} \frac{dp_y}{dp}, & A \frac{d\Omega_y}{dp} &= -a \frac{dp_x}{dp}, & \frac{dv_y}{dp} &= -a \frac{d\Omega_x}{dp}. \\ \frac{dv_z}{dp} &= \frac{1}{m}, & \frac{d\Omega_z}{dp} &= 0,\end{aligned}\quad (8)$$

Sistem rešujemo ob začetnih pogojih, ki predstavljajo vrednosti količin ob koncu drsenja pri vrednosti impulza normalne sile $p = p^*$: $v_x(p^*) = v_x^* = a\Omega_y^*$, $v_y(p^*) = v_y^* = -a\Omega_x^*$, $v_z(p^*) = v_z^*$, $\Omega_x(p^*) = \Omega_x^*$, $\Omega_y(p^*) = \Omega_y^*$, $\Omega_z(p^*) = \Omega_z^*$, $p_x(p^*) = p_x^* = \mu_T p^* \cos \alpha^*$, $p_y(p^*) = p_y^* = \mu_T p^* \sin \alpha^*$. Rešitve so preproste:

$$\begin{aligned}v_x(p) &= v_x^* = \text{konst.}, & \Omega_x(p) &= \Omega_x^* = \text{konst.}, & p_x(p) &= p_x^* = \text{konst.}, \\ v_y(p) &= v_y^* = \text{konst.}, & \Omega_y(p) &= \Omega_y^* = \text{konst.}, & p_y(p) &= p_y^* = \text{konst.} \\ v_z(p) &= v_z^* + \frac{p - p^*}{m}, & \Omega_z(p) &= \Omega_z^* = \text{konst.},\end{aligned}\quad (9)$$

Odvisne neznanke pri kotaljenju brez drsenja: v_B , p_T in α pa določimo iz izrazov: $v_B = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, $p_T = \mu_T p$, $\cos \alpha = p_x / p_T$ oziroma $\sin \alpha = p_y / p_T$.

2.3 Analiza gibanja med trkom

2.3.1 Trk z ali brez drsenja

V začetku trka kroglica običajno drsi. Ob začetku kotaljenja brez podrsavanja mora biti izpolnjen osnovni pogoj, da je hitrost delca v dotikališču enaka nič: $v_B = 0$. To se zgodi pri vrednosti impulza normalne sile $p = p^*$, ki ga določimo iz znanih rešitev za trk z drsenjem.

$$p^* = \frac{v_B^0}{\mu_{Td}} \left(\frac{1}{m} + \frac{a^2}{A} \right)^{-1} = \frac{2}{7} \frac{mv_B^0}{\mu_{Td}}. \quad (10)$$

O tem ali bo pri $p = p^*$ do kotaljenja brez podrsavanja res prišlo pa odloča razmerje med normalno in tangencialno komponento trčne sile: $T(p^*)/N(p^*) < \mu_{Ts}$, oziroma njunima impulzoma: $p_T(p^*)/p_N(p^*) < \mu_{Ts}$. Impulza določimo z enačbami, ki veljajo za trk brez podrsavanja

$$p_T(p^*) = \sqrt{p_x^2(p^*) + p_y^2(p^*)}, \quad p_N(p^*) = p^*. \quad (11)$$

p_x in p_y sta pri kotaljenju brez podrsavanja kar enaka vrednostim ob koncu podrsavanja – rešitev (9) iz katere izrazimo: $p_x(p^*) = \mu_{Td} p^* \cos \alpha^0$ in $p_y(p^*) = \mu_{Td} p^* \sin \alpha^0$. Impulz tangentne sile je potem enak $p_T(p^*) = \mu_{Td} p^*$, dodatni pogoj za trk brez drsenja pa zapišemo z

$$\frac{p_T(p^*)}{p_N(p^*)} = \frac{\mu_{Td} p^*}{p^*} = \mu_{Td} \leq \mu_{Ts}. \quad (12)$$

Pogoj (12) je vedno izpolnjen, iz literature namreč vemo, da je dinamični koeficient trenja vedno manjši ali kvečjemu enak statičnemu: $\mu_{Td} \leq \mu_{Ts}$. Enačba (12) odgovori tudi na vprašanje ali lahko med trkom pride do izmeničnega gibanja s podrsavanjem – brez podrsavanja – s podrsavanjem. Med trkom brez podrsavanja je razmerje normalnega in tangencialnega impulza trčne sile enako: $p_T/p_N = \mu_{Td} p^*/p$, ker je $p \geq p^*$ in $\mu_{Td} \leq \mu_{Ts}$, med trkom brez drsenja velja $p_T/p_N \leq \mu_{Ts}$, kar pomeni, da kroglica med trkom ne more preiti iz faze kotaljenja brez podrsavanja v kotaljenje s podrsavanjem.

2.3.2 Kompresijska in restitucijska faza trka

Med trkom se telesi v stiku deformirata, zato se njuni težišči približujeta. Hitrost približevanja je hitrost dotikališča v smeri pravokotno na dotikališčno ploskev – v_{Bz} , saj smo ravno dotikališčni točki predpisali namišljen deformabilni delec, ki zajame deformacijo toge kroglice in ploskve. Obdobju, ko se težišči teles v trku približujeta, pravimo kompresijska faza trka. V trenutku, ko hitrost približevanja postane enaka nič, se telesi ne približujeta več in kompresijske faze je konec. Čas, ko se to zgodi označimo s t_k , vrednost impulza pripadajoče normalne komponente trčne sile pa s p_k . Pogoj za konec kompresijske faze je torej $v_{Bz}(p_k) = 0$. Dotikališčna hitrost v smeri normale je kar enaka težiščni hitrosti v smeri normale. Izraz za račun težiščne hitrosti pa je enak pri trku s podrsavanjem in brez podrsavanja. Vrednost impulza p_k , pri katerem se konča kompresijska faza trka, je potem enaka

$$p_k = -mv_z^0. \quad (13)$$

S koncem kompresijske faze se konča približevanje teles. V nadaljevanju trka se telesi začneta razmikati, pri tem pa se vračata v prvotno nedeformirano obliko. Obdobju razmikanja in povrnitve prvotne oblike pravimo restitucijska faza trka. Ko kroglica in podlaga dokončno zgubita stik, se restitucijska faza konča, s tem pa je končan tudi trk. Kroglica se odlepí in poleti.

Predpostavimo, da je dolžina restitucijske faze trka, merjena z impulzom normalne sile p_r , odvisna samo od geometrijskih in materialnih parametrov teles. S trajanjem kompresijske faze je povezana prek koeficiente trka e , tako da velja

$$p_r = e p_k, \quad 0 \leq e \leq 1. \quad (14)$$

Koeficient trka je v tem modelu kar razmerje med povrnjeno in vloženo deformacijsko energijo med trkom. Določimo ga s preprostim preizkusom, pri katerem kroglico spustimo iz

znane višine, da prosto pade na vodoravno podlago, nato pa izmerimo višino po odboju – razmerje obeh višin je ravno koeficient trka.

Ob koncu kompresijske faze imamo bodisi trk s podrsavanjem bodisi trk brez podrsavanja, zato na enak način nadaljujemo analizo v restitucijski fazi trka. O vrsti gibanja v fazi restitucije bo torej odločala primerjava vrednosti p_k in p^* . Če je $p^* < p_k$, do konca podrsavanja pride še pred koncem kompresijske faze, kroglica pa se začne kotaliti brez podrsavanja in tako gibanje ohrani tudi v restitucijski fazi trka. Če pa je $p^* \geq p_k$, kroglica podrsuje v celotnem trajanju kompresijske faze, zato podrsuje tudi v restitucijski fazi.

Trajanje celotnega trka je vsota trajanj obeh faz. Vrednost impulza normalne sile ob koncu trka označimo s p_{trk} , izračunamo pa ga kot

$$p_{trk} = p_k + p_r = p_k(1+e). \quad (15)$$

Celoten trk se torej razteza na intervalu $[0, p_{trk}]$.

2.4 Izmenjavanje faz leta in trka

Let kroglice se konča s trkom ob podlago, po trku pa kroglica ponavadi znova poleti, nekaj časa leti in nato spet trči ob podlago. Ta proces – letenje, trk in ponovni vzlet – se odvija, dokler s trki ni porabljena vsa energija kroglice. V primeru popolnoma elastičnega trka ($e=1$) se to nikdar ne zgodi, saj je po trku kroglici povrnjena vsa energija, pri plastičnem trku ($e=0$) pa se to lahko zgodi že ob prvem trku. Najbolj pa nas zanimajo vmesne različice ($0 < e < 1$), ko kroglica nekajkrat trči ob podlago in vzleti, ob zadnjem trku pa se od podlage ne odlepi in se začne po njej kotaliti. Pogoj za odlepitev kroglice od podlage poznamo že iz analize kotaljenja: $v_{B_z} > 0$. Vedno, ko bo po trku (pri $p = p_{trk}$) hitrost dotikalicha v smeri normale večja od nič, se bo kroglica ločila od podlage in poletela. Tisti trk, pri katerem pa je hitrost dotikalicha v smeri normale ob koncu trka enaka nič, pa bo zadnji, saj se bo od tega trenutka dalje kroglica kotalila po podlagi

$$v_{B_z}(p_{trk}) = v_z(p_{trk}) = 0. \quad (16)$$

Pogoj lahko zapišemo bolj natančno iz znanih rešitev (6) in (15)

$$v_z(p_{trk}) = v_z^0 + \frac{p_{trk}}{m} = v_z^0 + \frac{p_k(1+e)}{m} = v_z^0 - \frac{mv_z^0(1+e)}{m} = -ev_z^0. \quad (17)$$

Normalna komponenta hitrosti težišča v_z po koncu trka je torej kar premosorazmerna s svojo vrednostjo na začetku trka. Po seriji trkov se težiščna hitrost v_z približuje vrednosti nič, v splošnem pa je zaradi (17) vsaj malo različna od nič. Zato ob predpostavkah, s katerimi opisujemo trk, pogoju (16) ob nobenem trku ni zadoščeno, kar bi pomenilo, da se izmenjavanje faz leta in trka ne konča. Iz izkušenj vemo da temu ni tako, zato za ustavitevni pogoj, ki ga potrebujemo, predpostavimo, da se kroglica od podlage ne odlepi, če je hitrost v_z ob koncu trka dovolj majhna. Pri tem nastopi vprašanje, kolikšna naj bo ta vrednost, da bo zajet čim širši spekter realnih primerov. Majhne vrednosti $v_z(p_{trk})$ pomenijo tudi kratko trajanje naslednje faze leta; ta je lahko tako kratka, da jo podobno kot trajanje trka, zanemarimo. Kriterij za velikost $v_z(p_{trk})$ ob zadnjem trku zato ni nujno preveč strog in je predmet diskusije v nadaljevanju.

3 Primeri

3.1 Let, trk in kotaljenje po ravnom pobočju

Opazujemo gibanje v ravni (X, Z), relief je ravno pobočje s 35% naklonom. Kroglo s polmerom $a = 0.3\text{m}$ zalučamo iz lege $X_T = 0\text{m}$, $Z_T = 3\text{m}$ z začetno hitrostjo $V_x = 10\text{m/s}$ in $\Omega_y = 20\text{s}^{-1}$; koeficient trka je enak $e = 0.4$, statični in dinamični koeficient trenja pa sta enaka $\mu_{Ts} = \mu_{Td} = 0.5$. Krogla zadane ob pobočje in po njem poskakuje. V tabeli 1 so prikazani rezultati za trajanje faz leta ter lege in hitrosti težišča ob koncu trka za prvih 20 trkov.

Tabela 1: Rezultati za poskakovanje krogle na ravni poševnini

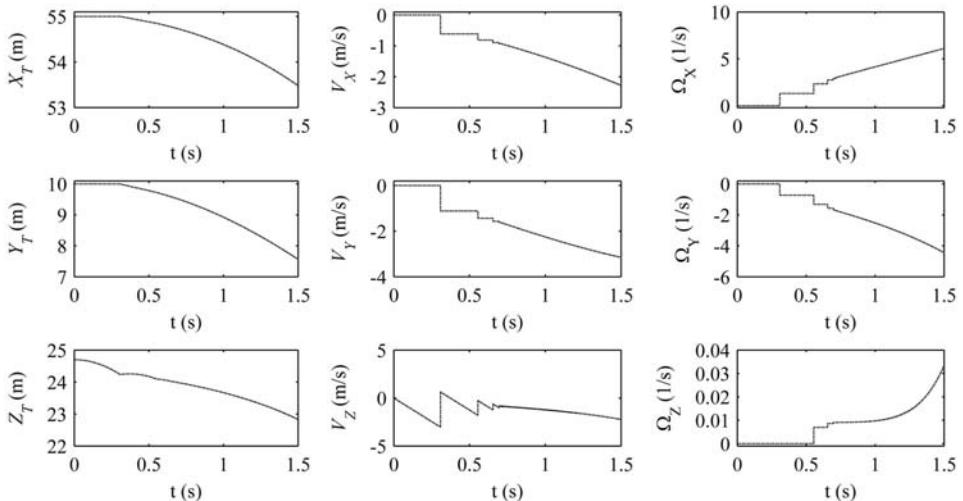
števec trkov	$t_L [\text{s}]$	$v_z [\text{m/s}]$	$X_T [\text{m}]$	$Z_T [\text{m}]$	$v_x [\text{m/s}]$	$\Omega_y [\text{1/s}]$
1	$4.6426 \cdot 10^{-1}$	3.0409	4.642643	1.942770	7.381446	24.604820
2	$6.5683 \cdot 10^{-1}$	1.2164	8.559005	3.313496	8.901895	29.672983
3	$2.6273 \cdot 10^{-1}$	$4.8654 \cdot 10^{-1}$	10.660955	4.049178	9.510075	31.700248
4	$1.0509 \cdot 10^{-1}$	$1.9462 \cdot 10^{-1}$	11.587400	4.373434	9.753346	32.511154
5	$4.2037 \cdot 10^{-2}$	$7.7847 \cdot 10^{-2}$	11.971684	4.507934	9.850655	32.835517
6	$1.6815 \cdot 10^{-2}$	$3.1139 \cdot 10^{-2}$	12.127591	4.562501	9.889579	32.965262
7	$6.7260 \cdot 10^{-3}$	$1.2456 \cdot 10^{-2}$	12.190304	4.584451	9.905148	33.017160
8	$2.6904 \cdot 10^{-3}$	$4.9822 \cdot 10^{-3}$	12.215446	4.593250	9.911376	33.037919
9	$1.0762 \cdot 10^{-3}$	$1.9929 \cdot 10^{-3}$	12.225512	4.596773	9.913867	33.046223
10	$4.3046 \cdot 10^{-4}$	$7.9715 \cdot 10^{-4}$	12.229539	4.598183	9.914863	33.049544
11	$1.7219 \cdot 10^{-4}$	$3.1886 \cdot 10^{-4}$	12.231151	4.598747	9.915262	33.050873
12	$6.8874 \cdot 10^{-5}$	$1.2754 \cdot 10^{-4}$	12.231795	4.598973	9.915421	33.051404
13	$2.7550 \cdot 10^{-5}$	$5.1018 \cdot 10^{-5}$	12.232053	4.599063	9.915485	33.051617
14	$1.1020 \cdot 10^{-5}$	$2.0407 \cdot 10^{-5}$	12.232156	4.599099	9.915511	33.051702
15	$4.4080 \cdot 10^{-6}$	$8.1630 \cdot 10^{-6}$	12.232197	4.599113	9.915521	33.051736
16	$1.7632 \cdot 10^{-6}$	$3.2652 \cdot 10^{-6}$	12.232214	4.599119	9.915525	33.051749
17	$7.0533 \cdot 10^{-7}$	$1.3062 \cdot 10^{-6}$	12.232221	4.599121	9.915526	33.051755
18	$2.8222 \cdot 10^{-7}$	$5.2278 \cdot 10^{-7}$	12.232223	4.599122	9.915527	33.051757
19	$1.1150 \cdot 10^{-7}$	$2.0385 \cdot 10^{-7}$	12.232224	4.599123	9.915527	33.051758
20	$4.4540 \cdot 10^{-8}$	$8.3422 \cdot 10^{-8}$	12.232225	4.599123	9.915527	33.051758

Opazimo da se lega kroglice in hitrosti v_x , Ω_y od 13. trka dalje le malo spremenijo, zato lahko numerični pogoj ustavitev izmenjavanja faz leta in trka (16) postavimo na $v_z < 10^{-4}$. Od tu naprej se krogla kotali po ravni.

3.2 Kotaljenje skalne gmote po pobočju

Prehod iz izmenjavanja faz leta in trka v kotaljenje opazujemo še za primer gibanja krogle po pobočju v obliku nagnjenega nagubanega žleba, širine 40m, dolžine 60m in povprečnim naklonom 53% [1]. Kroglo s polmerom $a = 0.6\text{m}$ in maso $m = 2800\text{kg}$ spustimo iz začetne

lege $X_T = 55 \text{ m}$, $Y_T = -10 \text{ m}$ in $Z_T = 24.7 \text{ m}$. Gibanje opazujemo 1.5 s za tri različne pogoje prehoda v kotaljenje: $v_z(p_{trk}) < 10^{-2}$, $v_z(p_{trk}) < 10^{-3}$ in $v_z(p_{trk}) < 10^{-4}$. Grafi značilnih količin so za vse tri primere predstavljeni na sliki 2.



Slika 2: Grafi značilnih količin za različne pogoje prehoda v kotaljenje ($v_z < 10^{-2}$, $v_z < 10^{-3}$ in $v_z < 10^{-4}$)

Pri prvem pogoju $v_z(p_{trk}) < 10^{-2}$ se potrkavanje zaključi že po sedmih trkih pri času $t = 0.7255 \text{ s}$, pri drugem pogoju $v_z(p_{trk}) < 10^{-3}$ se to zgodi pri času $t = 1.1067 \text{ s}$, ki zaznamuje 402. trk, pri pogoju $v_z(p_{trk}) < 10^{-4}$ pa krogla poskakuje ves čas opazovanja. Razlike v tiru gibanja in hitrostih v okviru grafične natančnosti za tri različne primere ni, zato sklepamo, da natančnost ugotovitve prehoda v kotaljenje bistveno ne vpliva na gibanje krogle v nadaljevanju.

4 Zaključek

V članku smo predstavili enačbe trka toge krogle s poljubno togo podlago in podrobnejše analizirali gibanje krogle med trkom. Numerične simulacije gibanja smo prikazali na dveh primerih v katerih smo posebej obravnavali pogoje za prehod iz izmenjavanja faz prostega leta in trka v kotaljenje po podlagi.

Literatura

- [1] P. Češarek, *Vpliv gibajočih se teles na gradbene konstrukcije*, diplomska naloga, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2008.
- [2] W.J. Stronge, *Impact mechanics*, Cambridge University Press, 2000.
- [3] M. Saje, D. Zupan, *Kotaljenje toge tanke okroglo ploščice po togi hrapavi ravnini 5. del: Let po zraku in trk s podlago*, <http://www.km.fgg.uni-lj.si/Predmeti/KiD/KD.htm> (dostopno 2002-2005), 29 str. 2002.



Stabilna implementacija metode stohastičnih končnih elementov

T. Melink¹ in J. Korelc²

Stable Stochastic Finite Element Method

Povzetek. V članku je predstavljen postopek diskretizacije stohastičnega polja s pomočjo Karhunen-Loèvove vrste. Opisan je način simbolne formulacije stohastičnih končnih elementov ter implementacija le-teh v računalniški program AceFEM. Podrobnejše je obravnavana problematika stabilnosti postopka z ozirom na obliko kovariančne funkcije. Na izbranih računskih primerih je prikazana realizacija stohastičnega polja.

Abstract. In present paper the procedure for the discretization of the stochastic field within the frame of Karhunen-Loève expansion and implementation of the stochastic finite elements into computer program AceFEM is introduced. The problem of numerical instability of the procedure is investigated and a new form of the covariance function is introduced. Realizations of the stochastic field are presented on the numerical examples.

1 Uvod

V gradbeništvu imamo opraviti z verjetnostjo pri skoraj vseh spremenljivkah, npr. pri lastnostih materiala, zemljine, obtežbi itd. Za ustrezno varnost pri dimenzioniranju je pri analizi potrebno upoštevati negotovosti vrednosti teh količin. Za opis, kako se vrednosti stohastičnih spremenljivk spreminjajo po prostoru in/ali času, uporabimo stohastično polje (prostor) ali proces (čas) in ga z namenom možnosti uporabe metode končnih elementov diskretiziramo. Problem učinkovite diskretizacije stohastičnega polja je že dolgo deležen velikega interesa, vendar se na tem področju intenzivneje opravljajo raziskave šele v zadnjih dveh desetletjih, z razvojem zmogljivejših računalnikov, saj upoštevanje verjetnosti močno poveča numerično zahtevnost in kompleksnost problema. Bolj realistično upoštevanje verjetnosti je pomembno za kontrolo ustreznosti standardnih postopkov dimenzioniranja konstrukcij, kjer se negotovosti upoštevajo le z varnostnimi faktorji. Naš cilj je razviti

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

splošno metodologijo formulacije in implementacije stohastične metode končnih elementov (SMKE), ki ne bo odvisna od topologije problema. V tem prispevku se bomo omejili le na homogena zvezna stohastična polja mehanskih spremenljivk (npr. Youngov modul, Poissonov količnik, debelina itd.), vendar predstavljen način obravnave stohastičnega polja lahko uporabimo tudi za druge spremenljivke ali stohastične procese.

2 Formulacija stohastičnih končnih elementov

2.1 Gaussovo stohastično polje

Naj bo $w(\mathbf{x}, \theta)$ homogeno stohastično polje z ničelno pričakovano vrednostjo, kjer je \mathbf{x} krajevni vektor, definiran preko d -dimenzionalne fizikalne domene $D \subset \mathbb{R}^d$, in θ dogodek z zalogo vrednosti Ω . Stohastično polje $w(\mathbf{x}, \theta)$ je določeno z gostoto verjetnosti $f_w(\theta)$ in kovariančno funkcijo $\text{cov}_w(\tau(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2))$. V članku se bomo omejili na stohastična polja z Gaussovo robno porazdelitvijo, ki jih lahko predstavimo s pomočjo razvoja v Karhunen-Loèvovo (KL) vrsto. Le-ta je sestavljena iz kombinacije determinističnih funkcij in pripadajočih slučajnih koeficientov [1], kar omogoči diskretizacijo stohastičnega polja.

Za stacionarne procese, pri katerih se vrednosti spreminjajo po prostoru, je najpogosteje uporabljena eksponentna kovariančna funkcija

$$\text{cov}_w(\tau(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) = \sigma_w^2 \cdot e^{-\frac{\tau}{l_c}}, \quad (1)$$

kjer je l_c korelacijska dolžina, σ_w^2 varianca Gaussove porazdelitve, $\tau(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ pa razdalja med poljubnima točkama, določena z globalnima krajevnima vektorjema \mathbf{x}_1 in \mathbf{x}_2 : $\tau = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$. Kovariančna funkcija je omejena, simetrična in pozitivno definitna.

2.2 Diskretizacija stohastičnega polja

Stohastično polje $w(\mathbf{x}, \theta)$ diskretiziramo z razvojem v KL vrsto. Ker razvoj velja za stohastična polja z ničelno pričakovano vrednostjo, najprej zapišemo stohastično polje kot vsoto pričakovane vrednosti tega polja $\bar{w}(\mathbf{x})$ in polja $z(\mathbf{x}, \theta)$ z ničelno pričakovano vrednostjo

$$w(\mathbf{x}, \theta) = \bar{w}(\mathbf{x}) + z(\mathbf{x}, \theta). \quad (2)$$

V naslednjem koraku stohastično polje $z(\mathbf{x}, \theta)$ razvijemo v neskončno vrsto, ki jo v numeričnih simulacijah aproksimiramo z M prvimi členi, kot sledi

$$w(\mathbf{x}, \theta) = \bar{w}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} f_j(\mathbf{x}) \xi_j(\theta) \approx \bar{w}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^M \sqrt{\lambda_j} f_j(\mathbf{x}) \xi_j(\theta), \quad (3)$$

kjer so $\xi_j(\theta)$ normirane nekorelirane slučajne spremenljivke, t.i. KL koeficienti. λ_j in $f_j(\mathbf{x})$ so lastne vrednosti in lastne funkcije, ki jih dobimo kot rešitev homogene Fredholmove integralske enačbe 2. vrste

$$\int_D \text{cov}_w(\tau) f_j(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 = \lambda_j f_j(\mathbf{x}_2). \quad (4)$$

V primeru Gaussovega slučajnega polja so $\xi_j(\theta)$ Gaussove spremenljivke z ničelno pričakovano vrednostjo in enotsko varianco ter so neodvisne in zato enostavne za generiranje. Ker mora biti kovariančna funkcija pozitivno definitna, so lastne vrednosti prav tako pozitivne ter razvrščene po padajočih vrednostih $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$. Lastne funkcije so normirane v smislu, da velja

$$\int_D f_n(\mathbf{x}) f_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{mn}. \quad (5)$$

Prednost razvoja stohastičnega polja v KL vrsto je v numerično učinkoviti in enostavni formulaciji ter dejstvu, da je metoda optimalna, saj je napaka aproksimacije za izbrano število členov vrste minimalna v smislu metode najmanjših kvadratov. V zvezi z učinkovitostjo KL dekompozicije je bilo narejenih precej študij [2, 3], ki so pokazale, da je razvoj v KL vrsto primeren predvsem za visoko korelirana stohastična polja, saj lastne vrednosti v tem primeru hitro padajo, kar pomeni, da so rezultati zadovoljivo natančni že, če ohranimo le nekaj prvih členov v KL vrsti. V primeru nizko koreliranega stohastičnega polja pa število KL členov, če želimo dovolj visoko natančnost, hitro narašča. Obstajajo tudi drugi načini diskretizacije stohastičnega polja, npr. spektralna predstavitev [3], optimalna linearna ocena [4], Fourier-Karhunen-Loëve diskretizacijska shema [5], vendar večinoma niso uporabni za procese, ki se spreminja s časom ali pa je pri enakem številu uporabljenih členov napaka večja.

2.3 Numerično reševanje Fredholmove integralske enačbe 2. vrste

Šibka točka KL dekompozicije je v reševanju Fredholmove integralske enačbe, ki razen za specifične kovariančne funkcije in enostavne domene problema, ni analitično rešljiva. Problem se zato običajno rešuje z numeričnimi metodami, med katerimi je najbolj uporabljená Galerkinova metoda, ki je bila uporabljená tudi v tem članku. Po tej metodi lastno funkcijo $f_k(\mathbf{x})$ zapišemo kot linearno kombinacijo oblikovnih funkcij $N_j(\mathbf{x})$ in neznanih koeficientov f_{jk}

$$f_k(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^J f_{jk} N_j(\mathbf{x}), \quad (6)$$

kjer je J število neznanih parametrov problema. Ustavitev enačbe (6) v (4) ob zahtevi, da je napaka ortogonalna na prostor oblikovnih funkcij, vodi v enačbo

$$\sum_{j=1}^J f_{jk} \left(\int_D \left(\int_D \text{cov}_w(\tau) N_i(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_2 \right) N_j(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 - \lambda_k \int_D N_i(\mathbf{x}_1) N_j(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 \right) = 0. \quad (7)$$

Če označimo

$$C_{ij} = \int_D \int_D \text{cov}_w(\tau) N_j(\mathbf{x}_1) N_i(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{ij} &= \int_D N_j(\mathbf{x}_1) N_i(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1, \\ \mathbf{f}_{ij} &= f_{ij} \quad \text{in} \\ \Lambda_{ij} &= \delta_{ij} \lambda_i, \end{aligned} \tag{8}$$

lahko enačbo (7) zapišemo v matrični obliki

$$\mathbf{C}\mathbf{f} = \mathbf{N}\mathbf{f}\boldsymbol{\Lambda}, \tag{9}$$

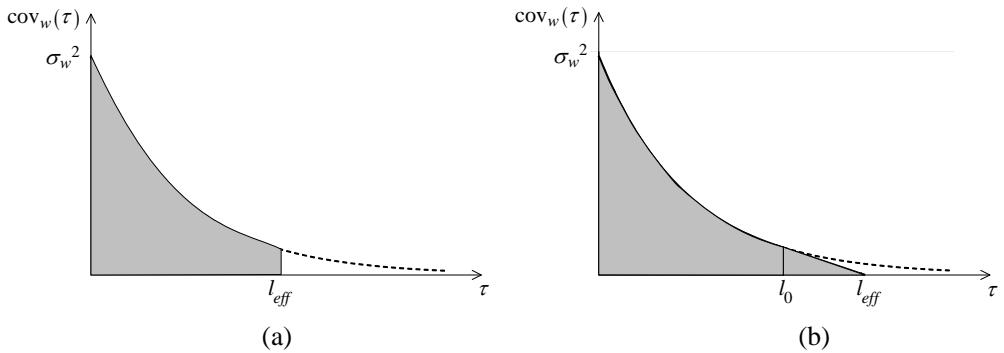
ki predstavlja pospoljen problem lastnih vrednosti. Kot rešitev enačbe (9) dobimo matriko lastnih vektorjev \mathbf{f} in vektor lastnih vrednosti $\boldsymbol{\Lambda}$. Lastne funkcije nato izračunamo po enačbi (6) in normiramo skladno s (5). Reševanje Fredholmove integralske enačbe po Galerkinovi metodi da spodnjo mejo rešitve za lastne vrednosti in je natančnejša za izračun lastnih vrednosti kot lastnih vektorjev.

2.4 Realizacija stohastičnega polja

Ko imamo izračunane vse deterministične člene v enačbi (3) obstaja več možnosti, kako realizirati stohastično polje, npr. simulacije Monte Carlo (MC) ali razvoj v polinomski kaos [1]. V tem članku bomo v poglavjih 5 in 6 predstavili rezultate, ki smo jih dobili s simulacijami MC.

3 Vpliv radija vplivnosti

Za razliko od običajne MKE je pri izvrednotenju matrike \mathbf{C} , zaradi globalne narave kovariančne funkcije, potrebno izvesti integracijo po celotni fizikalni domeni, kar rezultira v polni matriki \mathbf{C} . Zaradi tega je reševanje večjih problemov otežkočeno. Ker eksponentna kovariančna funkcija z večanjem razdalje τ med poljubnima točkama zelo hitro pada (slika 1), je le-to smiselno upoštevati le do neke omejene razdalje, t. i. efektivne vplivne razdalje l_{eff} . S problemom določitve l_{eff} so se ukvarjali že drugi, npr. Li et al. [5] je za l_{eff} izbral razdaljo, ko ima kovariančna funkcija le še 1% od izhodiščne vrednosti $cov_w(0)$, medtem ko je Phoon et al. [6] zanemaril člene kovariančne matrike, manjše od 10^{-4} . Z numeričnimi simulacijami smo ugotovili, da arbitarna izbira l_{eff} ter oblike funkcije, kot je prikazano na sliki 1 (a), lahko pripelje do numerične nestabilnosti, ki se izrazi v izgubi pozitivne definitnosti kovariančne matrike \mathbf{C} . To onemogoči uporabo numerično učinkovitih metod za reševanje pospoljenega problema lastnih vrednosti, npr. metode Arnoldi, ki je standarden del numeričnih knjižnic. Temu smo se izognili z modificirano kovariančno funkcijo, kjer od izbrane razdalje l_0 funkcijo aproksimiramo s premico, ki je tangentna na kovariančno funkcijo v tej točki. V numeričnih simulacijah je bila izbrana za $l_0 = 2l_c$, kar v primeru eksponentne kovariančne funkcije da $l_{eff} = 3l_c$. Računske primerjave, ki se jim bomo zaradi omejenega prostora tu odrekli, so potrdile, da naša poenostavitev ob primerno gosti mreži končnih elementov (glede na l_c) ne vpliva na rezultat. Še ena želena lastnost, ki jo dosežemo s takšnim formuliranjem stohastičnega polja je, da je matrika \mathbf{C} v primeru nizko koreliranega polja razpršena, kar poceni numerično reševanje.



Slika 1: Eksponentna kovariančna funkcija pri poljubni l_{eff} (a) in uporabljeni modificirana kovariančna funkcija (b).

4 Implementacija stohastičnih elementov v AceFEM

Postopek diskretizacije in realizacije stohastičnega polja z metodo končnih elementov lahko povzamemo v naslednje točke:

- diskretizacija domene z mrežo N -vozliščnih elementov;
- definiranje $2xN$ -vozliščnih stohastičnih KE
- izvrednotenje matrik \mathbf{C} in \mathbf{N} (en. (8));
- določitev \mathbf{f} in $\mathbf{\Lambda}$ z rešitvijo posplošenega problema lastnih vrednosti (en. (9));
- izračun realizacij stohastičnega polja po en. (3) z MC simulacijami ter določitev pričakovane vrednosti in variance zahtevanih količin.

Omenjeni postopki so bili izvedeni v okolju za končne elemente AceFEM, ki je z možnostjo definiranja KE v odprti kodi, zelo primeren za takšno formuliranje poljubnih novih KE.

4.1 Definiranje $2xN$ -vozliščnih elementov

Kot smo že omenili, je za izračun prispevka i -tega elementa k globalni matriki \mathbf{C} potrebno izvesti integracijo po celotni domeni, določeni z efektivno vplivno razdaljo l_{eff} (slika 2).

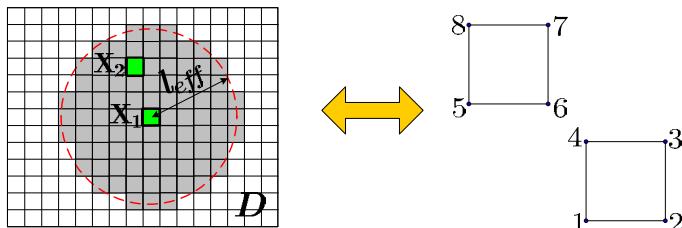
Klasično formulirani KE so za tako integracijo neprimerni, oziroma zahtevajo bistvene posege v strukturo okolja za končne elemente. Ideja je formulirati nove elemente tako, da je vsak N -vozliščni KE, določen z diskretizacijo domene, kombiniran z vsakim (tudi sam s seboj) KE na območju efektivne vplivne razdalje, katere izbira je opisana v poglavju 3. Vsaka kombinacija predstavlja nov $2xN$ -vozliščni stohastični KE. Primer takega elementa za 4-vozliščne dvodimensionalne KE je prikazan na sliki 2. Za izračun \mathbf{C} in \mathbf{N} je uporabljeni Gaussova integracija, ki se izvrednoti na nivoju elementa

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{ij}^e &= \sum_{g=1}^{nInt} \sum_{h=1}^{nInt} \sigma_w^2 \text{cov}_w(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_h) N_j(\mathbf{x}_g) N_i(\mathbf{x}_h) w_g w_h J_g J_h \\ \mathbf{N}_{ij}^e &= \sum_{h=1}^{nInt} N_j(\mathbf{x}_h) N_i(\mathbf{x}_h) w_h J_h \end{aligned}, \quad (10)$$

kjer so N_i in N_j standardne izoparametrične oblikovne funkcije za izbrano topologijo mreže, $nInt$ je število integracijskih točk, w_g in w_h uteži, pripadajoče k tem točkam, J_g in J_h pa determinanti Jacobijeve matrike preslikave. Globalni matriki \mathbf{C} in \mathbf{N} se izvrednotita v okolju AceFEM, po standardni proceduri združevanja

$$\mathbf{C} = {}^*\sum_e \mathbf{C}^e, \quad \mathbf{N} = {}^*\sum_e \mathbf{N}^e, \quad (11)$$

kjer \mathbf{C}^e oz. \mathbf{N}^e predstavlja prispevek e -tega elementa k globalnim matrikama \mathbf{C} in \mathbf{N} . Zvezdica pri oznaki za seštevek je pridana iz razloga, ker se posamezni prispevki elementov ne le enostavno seštevajo, temveč je upoštevana tudi kinematična kompatibilnost med elementi. Prednost uvedene formulacije stohastičnih KE je v tem, da za izvrednotenje \mathbf{C} lahko uporabimo klasično okolje za KE, ki ga ni potrebno nadgraditi in omogoča analizo problemov s poljubno topologijo, npr. 1D, 2D, 3D, lupine, kar je bistven napredek v primerjavi z obstoječimi načini reševanja SMKE, ki v glavnem obravnavajo samo regularne domene.



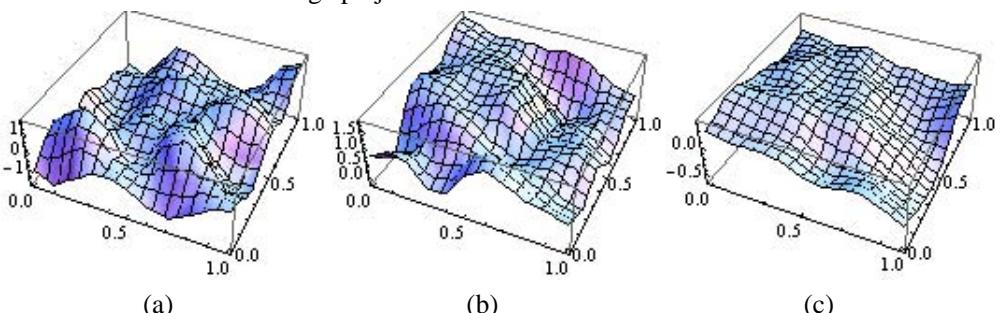
Slika 2: Diskretizacija domene D in formuliranje 2×4 -vozliščenih stohastičnih elementov.

5 Primer dvodimenzionalne kvadratne domene

Obravnavali bomo dvodimenzionalno stohastično polje z ničelno pričakovano vrednostjo in varianco 1, definirano na enotski kvadratni domeni.

5.1 Realizacija stohastičnega polja z različnimi korelacijskimi dolžinami

Na sliki 3 so prikazane 3 karakteristične realizacije polja za mrežo 16×16 elementov in tri različne korelacijske dolžine l_c : 0,1; 1 in 10. Na njej je lepo razviden vpliv l_c na povezanost vrednosti vzdolž stohastičnega polja.



Slika 3: Realizacija stoh. polja za l_c 0,1 (a), 1 (b) in 10 (c).

5.2 Realiziranje stohastičnega polja s simulacijami Monte Carlo

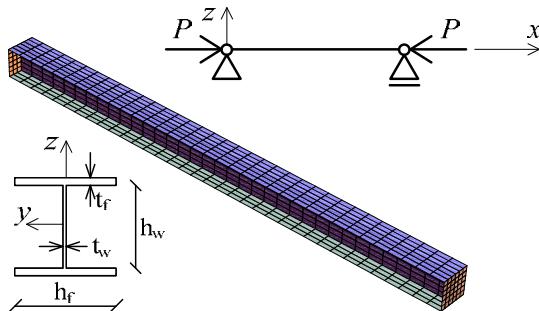
Tokrat smo polje s korelacijsko dolžino 1 diskretizirali z mrežo 10×10 KE. V KL dekompoziciji smo obdržali 10 členov. Naredili smo 10000 MC simulacij in v treh naključno izbranih točkah domene beležili realizirane vrednosti stohastičnega polja. Variance in pričakovane vrednosti stohastičnega polja v opazovanih točkah so prikazane v tabeli 1. Kot je razvidno, se izračunana pričakovana vrednost dobro ujema s točno pričakovano vrednostjo, ki je v danem primeru enaka 0. Problem ohranjanja variance preko polja je bil v raziskavah SMKE že izpostavljen [3] in kot je razvidno iz prikazanih rezultatov varianca tudi v našem primeru ni konstantna.

Tabela 1: Primerjava rezultatov v 3 naključno izbranih točkah za 10000 simulacij MC.

	točka 1	točka 2	točka 3
pričakovana vrednost	0,0006049	0,0085425	0,0057736
varianca	0,9438	0,8926	0,9175

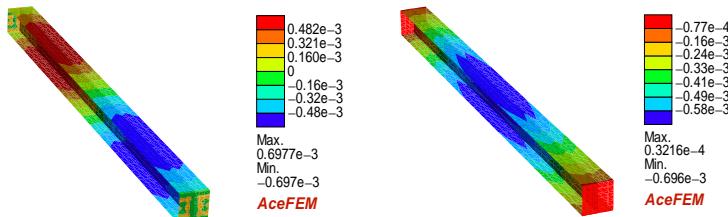
6 Primer tlačenega prostoležečega nosilca s stohastično spremenljivo debelino

Izbrali smo jekleni prostoležeči nosilec s prečnim prerezom I-profilu z dimenzijami stojine $h_w/t_w = 276/7$ mm in pasnice $h_f/t_f = 300/12$ mm, kot je prikazano na sliki 4. Dolžina nosilca je 5m. Nosilec je obremenjen s tlačno osno silo.



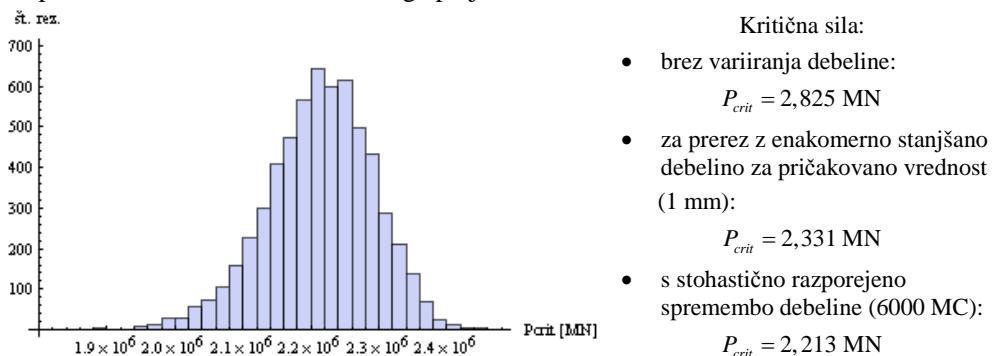
Slika 4: Primer tlačenega prostoležečega nosilca.

Po celiem nosilcu je definirano stohastično polje spremembe debeline pločevine, ki fizikalno predstavlja pojav korozije. Polje ima srednjo vrednost -1mm in standardno deviacijo 0,3 mm. Korelacijska dolžina je 300 mm. Upoštevanih je bilo 50 členov KL dekompozicije. Lastne funkcije so bile v tem primeru diskretizirane s 4-vozliščnimi ploskovnimi elementi. Primer dveh lastnih funkcij je prikazan na sliki 5.



Slika 5: Primera lastnih funkcij.

Naredili smo 6000 MC simulacij realizacije stohastičnega polja in spremljali kritično uklonsko silo. Histogram izračunane kritične sile je prikazan na sliki 6. Iz rezultatov je razvidno, da je pričakovana kritična tlačna uklonska sila ob upoštevanju stohastično razporejene spremembe debeline manjša kot v primeru, da debelino enakomerno stanjšamo za pričakovano vrednost stohastičnega polja.



Slika 6: Histogram kritična tlačne uklonske sile za 6000 simulacij MC, primerjava rezultatov numerične analize z/brez upoštevanja stohastike.

7 Zaključek

V članku prikazani način formulacije stohastičnih končnih elementov omogoča enostavno implementacijo metode SMKE v poljubno splošno okolje za MKE za poljubno topologijo problema. Uvedena modificirana kovariančna funkcija zagotavlja pozitivno definitnost kovariančne matrike \mathbf{C} in s tem numerično stabilnost in učinkovitost metode stohastičnih končnih elementov.

Literatura

- [1] R. Ghanem,P.D. Spanos. *Stochastic Finite Element: A Spectral Approach*. Springer, New York, 1991.
- [2] S.P. Huang, S.T. Quek, K.K. Phoon, *Convergence study of the truncated Karhunen-Loeve expansion for simulation of stochastic processes*. Int. J. Numer. Methods Engrg. 52 (2001) 1029–1043.
- [3] G. Stefanou, M. Papadrakakis, *Assesment of spectral representation and Karhunen-Loeve expansion methods for the simulation of Gaussian stochastic fields*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 196 (2007), 2465-2477.
- [4] C. C. Li, A. Derkiureghan, *Optimal Discretization Of Random-Fields*, Journal Of Engineering Mechanics-Asce 119 (1993), 1136-1154
- [5] C. F. Li, Y. T. Feng, D. R. J. Owen, D. F. Li, I. M. Davis, *A Fourier-Karhunen-Loeve discretization scheme for stationary random material properties in SFEM*. Int. J. Numer. Methods Engrg. 73 (2008) 1942-1965.
- [6] K. K. Phoon, S. P. Huang, S. T. Quek, *Implementation of Karhunen-loeve expansion for simulation using a wavelet-Galerkin scheme*. Probabilistic Engineering Mechanics 17 (2002) 293-303.



Plitka bimetalna lupina v homogenem temperaturnem polju ob učinkovanju zunanje sile

M. Jakomin¹ in F. Kosek²

Buckling of a shallow rectangular bimetallic shell subjected to outer loads and temperature

Povzetek. V prispevku smo formulirali geometrijsko nelinearni matematično-fizikalni model preskoka sistema tankostenske plitke translacijske bimetalne lupine v homogenem temperaturnem polju po teoriji velikih premikov, zmenih rotacij in majhnih specifičnih deformacij lupinskega elementa. Model omogoča izračun geometrijskih stanj plitkih translacijskih lupin zaradi delovanja temperaturnih in mehanskih obremenitev. Rezultati temeljijo na numerični rešitvi nelinearnega sistema parcialnih diferencialnih enačb s pripadajočimi robnimi pogoji po metodi končnih differenc.

Abstract. In the article, we have formulated a geometric non-linear mathematical-physical model of the snap-through of the system of a thin-walled shallow bimetallic translation shell in a homogenous temperature field according to the theory of large displacements, moderate rotations, and small strains of the shell element. The model enables the calculation of the geometric conditions, of shallow translation shells, due to the influences of temperature and mechanical loads. The results are based on the numeric solution of a non-linear system of partial differential equations with boundary conditions according to the finite difference method.

1 Uvod

Za varno delovanje strojev je bistvenega pomena, da se toplota, ki nastaja med obratovanjem stroja, učinkovito odvaja v okolico. Prenos toplote s stroja v okolico je poleg tehničnih značilnosti hlajenja odvisen tudi od karakteristik delovnega procesa in temperature okolice. V določenih okoliščinah lahko temperatura stroja preseže maksimalno dovoljeno vrednost, pri kateri sme stroj varno obratovati. V takšnem primeru nastane temperaturna preobremenitev stroja. Zaradi varnosti je zato potrebno vgrajevati varovalne elemente, ki stroj izklopijo, če temperatura preseže maksimalno dovoljeno vrednost. Zaradi zanesljivosti so se pri zaščiti pred temperaturno preobremenitvijo uveljavili linjski in ploskovni bimetalni

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za pomorstvo in promet

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

konstrukcijski elementi. Tanke in plitke bimetalne lupine z ustreznimi snovnimi in geometrijskimi karakteristikami imajo lastnost, da pri določeni temperaturi preskočijo v novo ravnovesno lego. Posledica zelo hitrega preskoka bimetalne lupine kot preklopnega elementa v termičnem stikalu je trenuten izklop električne napetosti in zaustavitev stroja. Preskok bimetalne lupine je dinamičen pojav, ki traja zelo kratek čas, zato preprečuje škodljivo iskrenje in taljenje električnih kontaktov ter podaljšuje življenjsko dobo termičnega stikala.

2 Termoelastične enačbe problema

V stacionarnem stanju opazujemo elementarno majhen del deformirane bimetalne lupine. Zapišemo pet projekcijskih ravnovesnih enačb za sile in momente na enoto dolžine[1,2]. Tem enačbam dodamo tri kinematične in tri konstitutivne enačbe, ki skupaj z osmimi enačbami za sile in momente na enoto dolžine tvorijo sistem termoelastičnih enačb za določitev premikov u, v, w na lupini v odvisnosti od zunanjih obremenitev in načina vpetja lupine[3]. S substitucijo neznanih veličin v enačbah za ravnovesje sil z ustreznimi enačbami v danem sistemu, prevedemo prvotni sistem enačb v sistem treh nelinearnih diferencialnih enačb osmega reda s pripadajočimi robnimi pogoji[3]:

$$\boxed{\begin{aligned} & J(w'''+\ddot{w}')\left(y_1''-w''\right)+H\left(v'+\dot{u}+w'\dot{w}\right) + \\ & D\left(u'+wy_1''+\frac{1}{2}(w')^2\right)' + \bar{D}\left(\dot{v}+w\ddot{y}_2+\frac{1}{2}(\dot{w})^2\right)' = 0 \\ \\ & J(\ddot{w}+\dot{w}'')\left(\ddot{y}_2-\ddot{w}\right)+H\left(v'+\dot{u}+w'\dot{w}\right)' + \\ & \bar{D}\left(u'+wy_1''+\frac{1}{2}(w')^2\right)' + D\left(\dot{v}+w\ddot{y}_2+\frac{1}{2}(\dot{w})^2\right)' = 0 \\ \\ & \left(D\left(u'+wy_1''+\frac{1}{2}(w')^2\right) + \bar{D}\left(\dot{v}+w\ddot{y}_2+\frac{1}{2}(\dot{w})^2\right) + GT\right)\left(y_1''-w''\right) + \\ & \left(\bar{D}\left(u'+wy_1''+\frac{1}{2}(w')^2\right) + D\left(\dot{v}+w\ddot{y}_2+\frac{1}{2}(\dot{w})^2\right) + GT\right)\left(\ddot{y}_2-\ddot{w}\right) - \\ & J\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}\right) = q_3 \end{aligned}} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 N_1 \Big|_{x_1=\pm a} &= \left(D \left(u' + w y_1'' + \frac{1}{2} (w')^2 \right) + \bar{D} \left(\dot{v} + w \ddot{y}_2 + \frac{1}{2} (\dot{w})^2 \right) + G T \right) \Big|_{x_1=\pm a} = 0 \\
 T_{12}^R \Big|_{x_1=\pm a} &= \left(H \left(v' + \dot{u} + w' \dot{w} \right) + 2L \dot{w}' (\ddot{y}_2 - \ddot{w}) \right) \Big|_{x_1=\pm a} = 0 \\
 T_{13}^R \Big|_{x_1=\pm a} &= J w''' + \bar{J} \ddot{w}' + 4L (\dot{w}') \Big|_{x_1=\pm a} = \mp (q_3 b + c_2) \frac{a}{b} \\
 M_1 \Big|_{x_1=\pm a} &= \left(J w'' + \bar{J} \ddot{w} + K T \right) \Big|_{x_1=\pm a} = 0 \\
 N_2 \Big|_{x_2=\pm b} &= \left(\bar{D} \left(u' + w y_1'' + \frac{1}{2} (w')^2 \right) + D \left(\dot{v} + w \ddot{y}_2 + \frac{1}{2} (\dot{w})^2 \right) + G T \right) \Big|_{x_2=\pm b} = 0 \\
 T_{21}^R \Big|_{x_2=\pm b} &= \left(H \left(v' + \dot{u} + w' \dot{w} \right) + 2L \dot{w}' (y_1'' - w'') \right) \Big|_{x_2=\pm b} = 0 \\
 T_{23}^R \Big|_{x_1=\pm b} &= J \ddot{w} + \bar{J} \dot{w}'' + 4L (\dot{w}'') \Big|_{x_1=\pm b} = \mp (q_3 a + c_1) \frac{b}{a} \\
 M_2 \Big|_{x_2=\pm b} &= \left(J \ddot{w} + \bar{J} w'' + K T \right) \Big|_{x_2=\pm b} = 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

3 Numerična rešitev sistema, rezultati in diskusija

Sistem nelinearnih diferencialnih enačb (1) s pripadajočimi robnimi pogoji (2) smo rešili po metodi končnih diferenc [4] v programskem paketu Mathematica 7.0.0. Predstavljamo rezultate za prosto položeno lupino obremenjeno s temperaturo T in silo F na enoto površine $S = 4ab$, ki ima naslednje snovne in geometrijske karakteristike:

konstrukcijski krivulji:	$y_1 = \frac{0,5}{10^2 mm} x_1^2$	$y_2 = \frac{0,5}{10^2 mm} x_2^2$
horizontalni polmer lupine:	$a = b = 10 mm$	
debelina lupine:	$\delta = 2\delta_1 = 2\delta_2 = 0,3 mm$	
Youngov elasticni modul:	$E_1 = E_2 = E = \frac{170000 N}{mm^2}$	
Poissonov kolicnik:	$\mu_1 = \mu_2 = \mu = 1/3$	
razteznostna koeficienta:	$\alpha_1 = 3,41 \cdot 10^{-5} K^{-1}$	$\alpha_2 = 1,41 \cdot 10^{-5} K^{-1}$

Lupino, ki je na zgornji ploskvi obremenjena z enakomerno in zvezno porazdeljeno silo na enoto površine $q_3 = F/S$, počasi segrevamo ter opazujemo spremembo razmerja višin ξ v odvisnosti od temperature T .

$$\xi = \frac{h(x_1)}{h_0(x_1)} \Big|_{x_1=a} = \frac{Y_1(a)}{y_1(a)} = \frac{y_1(a) - w(a)}{y_1(a)} = 1 - \frac{w(a)}{y_1(a)} \tag{4}$$

V robnih pogojih (2) upoštevamo, da se zaradi zunanje obremenitve q_3 pojavita reakciji vzdolž robov lupine:

$$c_1 = c_2 \Rightarrow T_{13}^R \Big|_{x_1=a} = T_{23}^R \Big|_{x_2=b} = \frac{-q_3 a}{2} = \frac{-F}{8a} \tag{5}$$

Stabilnostne krivulje v odvisnosti od mehanske obremenitve q_3 in temperature T za lupino s snovnimi in geometrijskimi karakteristikami v (3) so prikazane na sliki 1. Z naraščanjem obremenitve $|q_3|$ se temperatura obeh preskokov T_{p1} in T_{p2} zmanjšuje.

Tabela 1: Temperatura preskoka v odvisnosti od obremenitve q_3 v primeru enakomernega podprtja na robovih lupine

$q_3 = \frac{F}{4a^2} [N / mm^2]$	$F = 0$ $q_3 = 0$	$F = -20$ $q_3 = -0,05$	$F = -40$ $q_3 = -0,1$	$F = -70$ $q_3 = -0,175$	$F = -105$ $q_3 = -0,2625$
$T_{p1} [C^\circ]$	$T_{p1} = 102,4$ $\xi_1 = 0,20$	$T_{p1} = 82,2$ $\xi_1 = 0,28$	$T_{p1} = 61,3$ $\xi_1 = 0,32$	$T_{p1} = 31,4$ $\xi_1 = 0,35$	$T_{p1} = -3,7$ $\xi_1 = 0,34$
$T_{p2} [C^\circ]$	$T_{p2} = 97,6$ $\xi_2 = 0,20$	$T_{p2} = 77,6$ $\xi_2 = -0,28$	$T_{p2} = 55,3$ $\xi_2 = -0,27$	$T_{p2} = 24,4$ $\xi_2 = -0,28$	$T_{p2} = -11,8$ $\xi_2 = -0,27$

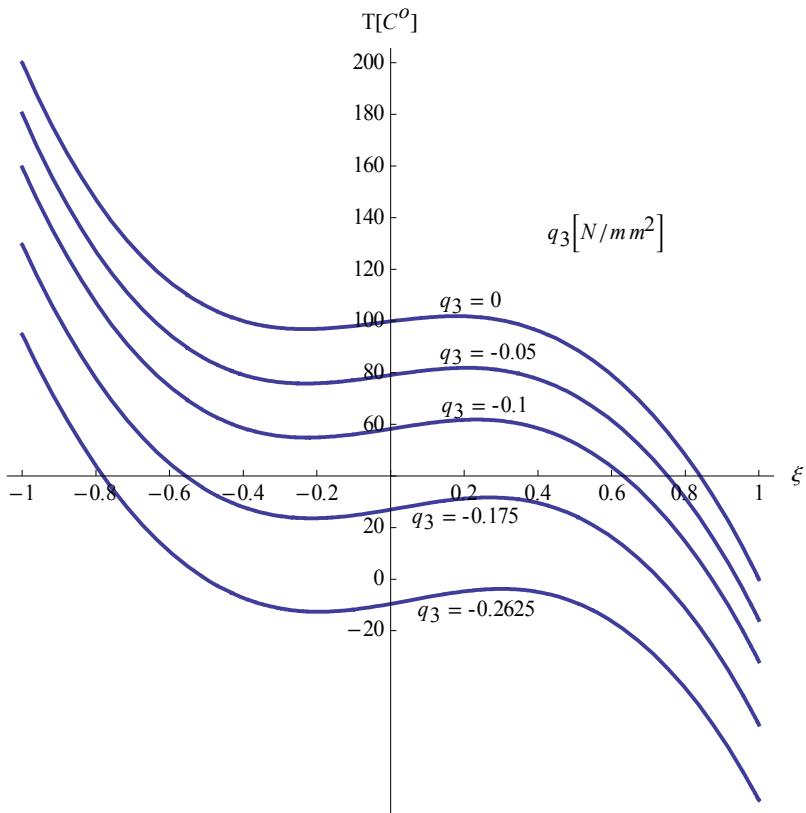
Pri dovolj veliki sili na enoto površine $|q_3|$ lupina preskoči, ne da bi jo bilo potrebno dodatno segrevati. Z interpolacijo temperature preskoka T_{p1} v odvisnosti od zunanje obremenitve q_3 v tabeli 1 smo v obravnavanem primeru izračunali, da lupina, brez dodatnega segrevanja preskoči, če je obremenjena z enakomerno zvezno porazdeljeno silo $F = -101,4 N$ oziroma z obremenitvijo $q_3 = -0,2535 N / mm^2$. Flatirano stanje bimetalne lupine nastopi pri temperaturi T_f , ki je v primeru temperaturno obremenjene lupine z enakima paraboličnima konstrukcijskima krivuljama:

$$T_f = \frac{-2k(J + \bar{J})}{K} = \frac{4k\delta}{3(\alpha_1 - \alpha_2)} \quad (6)$$

V nadaljevanju si oglejmo razmere pri mehansko in temperaturno obremenjeni lupini, kjer se sila na enoto površine q_3 kompenzira točkovno na mestu podprtja na štirih vogalih prosti položene bimetalne lupine. Sili T_{13} in T_{23} na vogalih lupine sta:

$$T_{13}^R \Big|_{x_1=a} = T_{23}^R \Big|_{x_2=a} = \frac{-F/2}{4h} \quad (7)$$

kjer $h [mm]$ označuje dolžino roba ob vogalu lupine, kjer učinkujeta reducirani prečni sili ne enoto dolžine T_{13}^R in T_{23}^R . Točkovno podprtje lupine nastopi, ko je $\lim h \rightarrow 0$. Rezultati za ta obremenitveni primer so v tabeli 2.



Slika 1: Stabilnostne krivulje za različne vrednosti obremenitve q_3

Tabela 2: Temperatura preskoka v odvisnosti od obremenitve q_3 v primeru prosto položene točkovno podprte lupine

$q_3 = \frac{F}{4a^2} [N / mm^2]$	$F = -20$ $q_3 = -0,05$	$F = -40$ $q_3 = -0,1$	$F = -70$ $q_3 = -0,175$	$F = -88$ $q_3 = -0,22$	$F = -105$ $q_3 = -0,2625$
$T_{p1} [C^\circ]$	$T_{p1} = 78,4$ $\xi_1 = 0,27$	$T_{p1} = 54,4$ $\xi_1 = 0,36$	$T_{p1} = 20,3$ $\xi_1 = 0,40$	$T_{p1} = 0,0$ $\xi_1 = 0,44$	$T_{p1} = -19,8$ $\xi_1 = 0,47$
$T_{p2} [C^\circ]$	$T_{p2} = 72,5$ $\xi_2 = -0,33$	$T_{p1} = 45,1$ $\xi_2 = -0,27$	$T_{p2} = 5,4$ $\xi_2 = -0,28$	$T_{p2} = -19,2$ $\xi_2 = -0,28$	$T_{p2} = -46,2$ $\xi_1 = -0,28$

Oglejmo si tudi primer prosto položene točkovno podprte bimetalne lupine, ki je v temenu, torej v točki $x_1 = x_2 = 0$, obremenjena s koncentrirano silo F . Za ta obremenitveni primer je potrebno v projekcijskih ravnovesnih enačbah (2) postaviti:

$$\begin{aligned} q_3 &= \frac{F}{4h^2} & -h \leq (x_1 \wedge x_2) \leq h \\ q_3 &= 0 & -h > (x_1 \vee x_2) > h \end{aligned} \quad (8)$$

za reducirani prečni sili na enoto dolžine T_{13}^R in T_{23}^R vzeti vrednosti v enačbi (7), parameter h , ki določa območje kjer učinkuje sila F , pa limitirati proti nič : $\lim h \rightarrow 0$. Temperature preskokov v odvisnosti od zunanje sile F v temenu lupine so zapisane v tabeli 3, oblika lupine v trenutku prvega temperaturnega preskoka pri obremenitvi s silo $F = -105N$ pa je prikazana na sliki 2. Na sliki 3 je razvidno lokalno vbočenje lupine zaradi točkovne sile v temenu lupine.

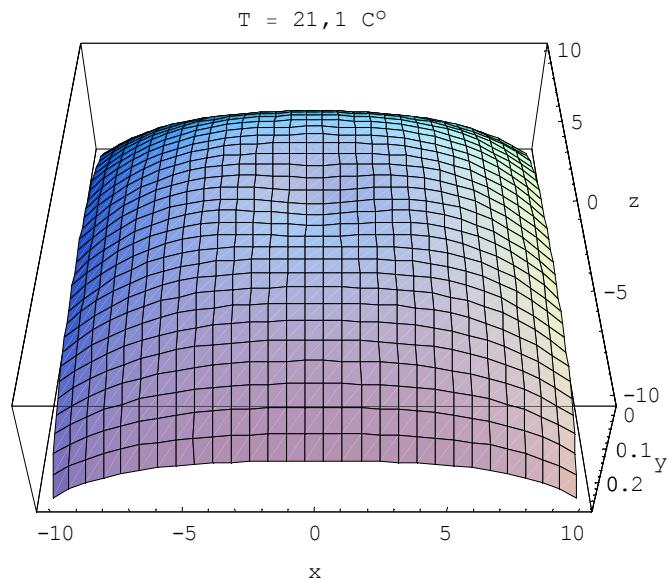
Tabela 3: Temperatura preskoka v odvisnosti od zunanje sile F v primeru prosto položene točkovno podprte lupine

$F[N]$	$F = -20$	$F = -40$	$F = -70$	$F = -105$	$F = -132$
$T_{p1}[C^\circ]$	$T_{p1} = 86,7$ $\xi_1 = 0,24$	$T_{p1} = 72,5$ $\xi_1 = 0,27$	$T_{p1} = 48,3$ $\xi_1 = 0,32$	$T_{p1} = 21,1$ $\xi_1 = 0,33$	$T_{p1} = 0,0$ $\xi_1 = 0,40$
$T_{p2}[C^\circ]$	$T_{p2} = 82,3$ $\xi_2 = -0,32$	$T_{p2} = 66,3$ $\xi_2 = -0,28$	$T_{p2} = 43,1$ $\xi_2 = -0,25$	$T_{p2} = 17,1$ $\xi_2 = -0,23$	$T_{p1} = -2,9$ $\xi_1 = -0,20$

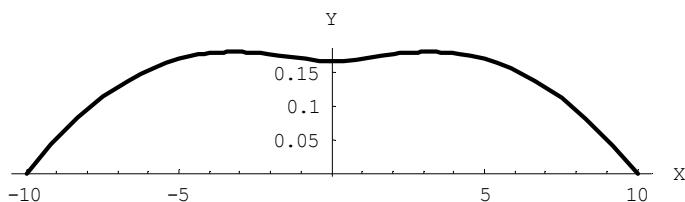
Za konec bomo obravnavali temperaturno obremenjeno lupino, ki je vrtljivo vpeta na vogalih. Tako vpeta lupina se v horizontalni smeri ne more raztezati. V robnih pogojih sedaj upoštevamo, da je na vogalih lupine horizontalni premik enak nič:

$$w \cos \varphi \sin \psi + u \cos \psi - v \sin \varphi \sin \psi \Big|_{x_1=x_2=a} \cong w y'_1 + u \Big|_{x_1=x_2=a} = 0 \quad (9)$$

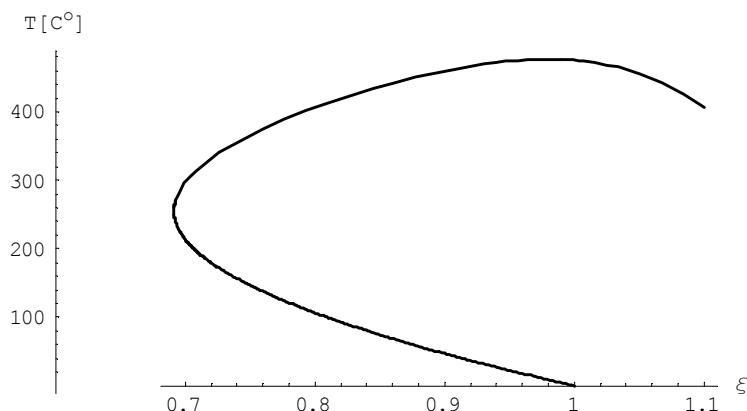
Stabilnostna krivulja, ki prikazuje razmerje višin ξ v odvisnosti od temperature T je za ta obremenitveni primer prikazana na sliki 4. Numerični rezultati kažejo, da so pri segrevanju lupine do temperature $T = 255 C^\circ$ elementi w premika \vec{u} na sredini robov lupine pozitivni na vogalih lupine pa negativni. Gledano v celoti se bombiranost na vogalih vrtljivo vpete lupine s segrevanjem povečuje. Razmerje višin ξ je pri temperaturi $T = 476 C^\circ$ spet enako ena. Z ozirom na obliko stabilnostne krivulje na sliki 4, ki kaže, da se v labilnem napetostnem območju razmerje višin ξ povečuje, zaključujemo, da lupina ne preskoči v konveksno obliko.



Slika 2: Geometrija lupine v začetku gornjega preskoka v primeru delovanja koncentrirane sile $F = -105N$ v temenu lupine



Slika 3: Pojav lokalnega vbočenja v primeru temperaturne obremenitve in delovanja mehanske sile $F = -105N$ v temenu lupine



Slika 4: Stabilnostna krivulja za na vogalih vrtljivo vpeto lupino

4 Sklep

Prosto položene tankostenske plitke bimetalne lupine imajo lastnost, da pri določeni temperaturi preskočijo v novo ravnovesno lego. Temperatura preskoka T_p je odvisna od snovno geometrijskih lastnosti lupin, zunanje mehanske obremenitve in načina vpeta. Enoslojne lupine s konstantnim koeficientom linearnega temperaturnega raztezka nimajo preskoka. Prav tako nimajo preskoka zelo plitke bimetalne lupine z majhno vrednostjo parametra k konstrukcijskih krivulj. Tako denimo lupina s snovnimi in geometrijskimi karakteristikami v (3) nima temperaturnega preskoka, če znaša njen horizontalni polmer $a = b \leq 9,53 \text{ mm}$. »Bombirane« oziroma manj plitke lupine preskočijo pri višji temperaturi.

Pri enakem horizontalnem polmeru a bimetalne lupine narašča temperatura gornjega preskoka T_{p1} z naraščanjem parametra k konstrukcijskih krivulj. Če na lupino deluje tudi zunanja sila F nastopi preskok lupine pri temperaturi, ki je v primerjavi s temperaturo preskoka T_{p1} enake lupine obremenjene samo temperaturno, nižja. Pri kateri temperaturi bo lupina preskočila je poleg velikosti sile F in načina njene porazdelitve po površini lupine odvisno tudi od reakcij na njenih robovih. Temperatura preskoka T_{p1} je najmanjša, kadar se zunanja sila F kompenzira točkovno na vogalih lupine. Pri dovolj veliki sili F lupina preskoči, ne da bi jo bilo potrebno dodatno temperaturno obremenjevati.

Da nastopi pri bimetalnih lupinah preskok, je potrebno poleg dovolj visoke temperature zagotoviti, da se robovi lupine lahko prosto raztezajo. Pri bimetalni lupini, ki je na vogalih vrtljivo vpeta, so premiki v horizontalni smeri onemogočeni. Takšna lupina se lahko na vogalih razteza le v vertikalni smeri zaradi česar z naraščanjem temperature T narašča tudi bombiranost lupine. Na ta način vpeta lupina ne more opravljati funkcijo termičnega stikala.

5 Literatura

- [1] Novozhilov V. V., *The Theory of Thin Shells*, 6-14, P. Noordhoff LTD, 1959.
- [2] Reddy J. N., *Theory and Analysis of Elastic Plates*, 21-24, Taylor & Francis 1999.
- [3] Jakomin M., Kosel F., *Termoelastične enačbe za opis sistema bimetalne translacijske lupine z dvojno ukrivljenostjo*, Kuhljevi dnevi 2008, Dvor Jezeršek Cerklje na Gorenjskem 25-26 september. 2008.
- [4] Smith G.D., *Numerical Solution of Partial Differential Equations-Finite Difference methods*, Oxford, Clarendon Press, Third edition 1985, Reprinted 2008.



Upogib elastičnega nosilca

G. Mejak¹

Bending of the elastic beam

Povzetek. V prispevku je obravnavan upogib elastičnega nosilca s kinematično predpostavko, da ravni preseki referenčnega položaja ostanejo pri deformaciji ravni. Z uporabo Coleman-Nollovega postopka so pri predpostavki, da je notranja energija tranzverzalno izotropična funkcija glavnih invariant desnega Cauchy-Greenovega tenzorja, izpeljane konstitutivne enačbe. Ravnovesne enačbe so dane kot stacionarne enačbe energijskega funkcionala. Teorija je ilustrirana na ravninskem upogibu nosilca.

Abstract. Bending of the elastic beam with the kinematic constraint that the plane cross sections of the referential configuration remain plane is presented. Constitutive equations are obtained using the Coleman-Noll procedure. It is assumed that the internal energy is a transversally isotropic function of the principal invariants of the right Cauchy-Green tensor. Equilibrium equations are given as the stationary equations of the energy functional. As an example, a plane bending problem is presented.

1 Uvod

V literaturi je dobro znan Reissnerjev model nosilca, kjer preseki ravni na os nosilca v referenčnem položaju pri deformaciji ostanejo ravni tudi v deformiranem položaju, [4]. Na osnovi teh predpostavk so, z uporabo principa virtualnega dela za osno in strižno silo ter upogibni moment, izpeljane pripadajoče deformacijske količine in ravnovesne enačbe. Konstitutivna relacija med deformacijskimi količinami in osno in strižno silo ter upogibnim momentom potem določa deformacijo nosilca.

V prispevku bomo predstavili alternativno možnost, kjer so enačbe deformacije nosilca izpeljane neposredno iz osnovnih principov mehanike kontinuma. Kinematične predpostavke nosilca določajo obliko desnega Cauchy-Greenovega tenzorja. Pri dani obliki potem po Coleman-Nollovem postopku dobimo pripadajoče konstitutivne enačbe za napetostni tenzor. Ravnovesne enačbe, ki so stacionarne enačbe energijskega funkcionala, skupaj s konstitutivnimi enačbami določajo enačbe deformacije nosilca. Osnovna literatura za razumevanje članka je naprimer [1] ali [3]. Glej tudi [2].

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

2 Kinematika nosilca

Uporabljali bomo naslednje oznake; referenčni položaj nosilca B , prostorski položaj b , položaj poljubne točke nosilca v referenčnem položaju P , v prostorskem položaju p . Predpostavili bomo, da je nosilec v referenčnem položaju raven. V izbranem koordinatnem sistemu je tako položaj poljubne točke nosilca dan s $P = P_0 + s\vec{E}_1 + X_2\vec{E}_2 + X_3\vec{E}_3 = P_0 + s\vec{E}_1 + \vec{R}$, kjer je P_0 položaj izhodiščne točke nosilca, \vec{E}_i so ortonormirani bazni vektorji in $\vec{R} = X_2\vec{E}_2 + X_3\vec{E}_3$. Privzeli bomo, da je os nosilca $P_0 + s\vec{E}_1$, $s \in [0, l]$ centralna os in da sta \vec{E}_2 in \vec{E}_3 glavni osi preseka $A = A(s)$.

V prispevku se bomo omejili na model, pri katerem ravni preseki, ki so v referenčnem položaju pravokotni na os nosilca, ostanejo pri deformaciji nosilca ravni. To pomeni, da je prostorski položaj dan s $p = p_0(s) + Q(s)\vec{R}$, kjer je $p_0(s)$, $s \in [0, l]$ deformirana centralna os, $Q(s)$ pa je enoparametrična družina rotacij. Gradient deformacije je

$$\underline{\underline{F}} = \frac{\partial p}{\partial P} = \vec{m} \otimes \vec{E}_1 + Q(s)\vec{E}_2 \otimes \vec{E}_2 + Q(s)\vec{E}_3 \otimes \vec{E}_3, \quad (1)$$

kjer je $\vec{m} = \frac{dp_0}{ds} + \vec{\omega}' \times Q(s)\vec{R}$. Tu je $\vec{\omega}' = \vec{\omega}'(s)$ vektor kotne hitrosti rotacije $Q(s)$. Označimo $\vec{T} = Q^T \frac{dp_0}{ds}$, $\vec{\omega} = Q^T \vec{\omega}'$ in

$$\vec{M} = Q^T \vec{m} = \vec{T} + \vec{\omega} \times \vec{R}. \quad (2)$$

Potem je

$$\underline{\underline{F}} = Q \left(\vec{M} \otimes \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \otimes \vec{E}_2 + \vec{E}_3 \otimes \vec{E}_3 \right) = Q \underline{\underline{F}}_0. \quad (3)$$

Desni Cauchy-Greenov tenzor je $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}_0^T \underline{\underline{F}}_0$ in je dan s

$$\underline{\underline{C}} = (\vec{M} \cdot \vec{M})\vec{E}_1 \otimes \vec{E}_1 + (\vec{M} \cdot \vec{E}_2) \left(\vec{E}_1 \otimes \vec{E}_2 + \vec{E}_2 \otimes \vec{E}_1 \right) + (\vec{M} \cdot \vec{E}_3) \left(\vec{E}_1 \otimes \vec{E}_3 + \vec{E}_3 \otimes \vec{E}_1 \right). \quad (4)$$

Vidimo, da je $\underline{\underline{C}}$ funkcija vektorja \vec{M} . Deformacija je tako natanko določena z vektorskima funkcijama $\vec{\omega} = \vec{\omega}(s)$ in $\vec{T} = \vec{T}(s)$.

Deformacija ohranja volumenski element, če je $J = \det \underline{\underline{F}} = 1$ oziroma, če je tretja invarianta desnega Cauchy-Greenovega tenzorja $I_3(\underline{\underline{C}})$ enaka 1. Za nosilec je $I_3(\underline{\underline{C}}) = (T_1 + X_3\omega_2 - X_2\omega_3)^2$. Ker so komponente T_i in ω_i vektorjev \vec{T} in $\vec{\omega}$ funkcije spremenljivke s deformacija nosilca ni izohorična. Ohranja pa volumen element na presekih, če je $\int_{A(s)} J dA = |A(s)|$. Tu smo z $|A|$ označili površino preseka $A(s)$. Pri pogoju, da je os nosilca centralna os, se ta pogoj reducira v $T_1(s) = 1$.

3 Konstitutivne relacije

Omejili se bomo na hiperelastični material oziroma na reverzibilni model pri katerem je delo napetostnega tenzorja enako nič pri ciklični deformaciji. Potem je po prvem zakonu termodinamike

$$\rho \frac{D u}{D t} = \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{F}}, \quad (5)$$

kjer ρ gostota, $u = u(\underline{\underline{C}})$ specifična notranja energija, $\underline{\underline{T}}$ Cauchyjev napetostni tenzor in $\underline{\underline{M}}$ tenzor deformacijskih hitrosti. Iz (5) z upoštevanjem (4) sledi

$$0 = (2\rho_0 \frac{\partial u}{\partial \underline{\underline{C}}} - \underline{\underline{T}}^{2PK}) : \dot{\underline{\underline{C}}} = (2\rho_0 \frac{\partial u}{\partial \underline{\underline{C}}} - \underline{\underline{T}}^{2PK}) : \frac{\partial \underline{\underline{C}}}{\partial \vec{M}} \cdot \dot{\vec{M}}, \quad (6)$$

kjer je $\rho_0 = J\rho$ gostota v referenčnem položaju, $\underline{\underline{T}}^{2PK}$ drugi Piola-Krkhoffov tenzor in

$$\frac{\partial \underline{\underline{C}}}{\partial \vec{M}} = 2\vec{E}_1 \otimes \vec{E}_1 \otimes \vec{M} + (\vec{E}_1 \otimes \vec{E}_2 + \vec{E}_2 \otimes \vec{E}_1) \otimes \vec{E}_2 + (\vec{E}_1 \otimes \vec{E}_3 + \vec{E}_3 \otimes \vec{E}_1) \otimes \vec{E}_3. \quad (7)$$

Za notranjo energijo u bomo privzeli, da je tranzverzalno izotropična v smeri osi nosilca. Ta predpostavka je v skladu z zahtevo, da preseki pravokotni na nevtralno os ostajajo ravni. Notranja energija je tako funkcija invariant

$$I_1 = S \underline{\underline{C}}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \left((S \underline{\underline{C}})^2 - S \underline{\underline{C}}^2 \right), \quad I_3 = \det \underline{\underline{C}}, \quad I_4 = \vec{E}_1 \cdot \underline{\underline{C}} \vec{E}_1, \quad I_5 = \vec{E}_1 \cdot \underline{\underline{C}}^2 \vec{E}_1.$$

Upoštevajmo, da je

$$\frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{C}}} = I_1, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{C}}} = I_1 \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{C}}, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \underline{\underline{C}}} = I_3 \underline{\underline{C}}^{-T}, \quad \frac{\partial I_4}{\partial \underline{\underline{C}}} = \vec{E}_1 \otimes \vec{E}_1, \quad \frac{\partial I_5}{\partial \underline{\underline{C}}} = 2\underline{\underline{C}} \vec{E}_1 \otimes \vec{E}_1.$$

Izračunajmo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \underline{\underline{C}}} : \frac{\partial \underline{\underline{C}}}{\partial \vec{M}} &= 2 \left(\frac{\partial u}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial u}{\partial I_2} - \frac{\partial u}{\partial I_2} |\vec{M}|^2 + \frac{\partial u}{\partial I_3} + \frac{\partial u}{\partial I_4} + 2 \frac{\partial u}{\partial I_5} |\vec{M}|^2 \right) \vec{M} \\ &+ 2 \left(-\frac{\partial u}{\partial I_2} - \frac{\partial u}{\partial I_3} + \frac{\partial u}{\partial I_5} \right) ((\vec{M} \cdot \vec{E}_2) \vec{E}_2 + (\vec{M} \cdot \vec{E}_3) \vec{E}_3) \end{aligned} \quad (8)$$

in

$$\begin{aligned} \vec{T}^{2PK} &:= \frac{1}{2} \underline{\underline{T}}^{2PK} : \frac{\partial \underline{\underline{C}}}{\partial \vec{M}} = T_{11}^{2PK} (T_1 + X_3 \omega_2 - X_2 \omega_3) \vec{E}_1 \\ &+ (T_{12}^{2PK} + T_{11}^{2PK} (T_2 - X_3 \omega_1)) \vec{E}_2 + (T_{13}^{2PK} + T_{11}^{2PK} (T_3 + X_2 \omega_1)) \vec{E}_3. \end{aligned} \quad (9)$$

Privzemimo, da so komponente \vec{M} neodvisne. Potem iz (6), (8) in (9) sledi

$$\begin{aligned} T_{11}^{2PK} &= \rho_0 \left(2 \frac{\partial u}{\partial I_5} \left((T_1 - X_2 \omega_3 + X_3 \omega_2)^2 + (T_2 - X_3 \omega_1)^2 + (T_3 + X_2 \omega_1)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial u}{\partial I_1} + 2 \frac{\partial u}{\partial I_2} + \frac{\partial u}{\partial I_3} + \frac{\partial u}{\partial I_4} \right) \\ T_{12}^{2PK} &= -\rho_0 (T_2 - X_3 \omega_1) \left(\frac{\partial u}{\partial I_2} + \frac{\partial u}{\partial I_3} - \frac{\partial u}{\partial I_5} \right) \\ T_{13}^{2PK} &= -\rho_0 (T_3 + X_2 \omega_1) \left(\frac{\partial u}{\partial I_2} + \frac{\partial u}{\partial I_3} - \frac{\partial u}{\partial I_5} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

Konstitutivna relacija ostalih komponent napetostnega tenzorja ne določa.

4 Ravnovesne enačbe

Ravnovesne enačbe so stacionarne enačbe energijskega funkcionala

$$\Psi = \int_b \rho \left(u(\underline{\underline{C}}) - \vec{f} \cdot (p - o) \right) dv. \quad (11)$$

Tu je \vec{f} specifična gostota volumenske sile, o pa je poljubna točka. V (11) upoštevajmo zakon o ohranitvi mase, (6) in (9). Potem

$$\delta\Psi = \int_B \left(\vec{T}^{2PK} \cdot \delta\vec{M} - \rho_0 \vec{f} \cdot \delta p \right) dV, \quad (12)$$

kjer je

$$\delta\vec{M} = \delta\vec{T} + \delta\vec{\omega} \times \vec{R}. \quad (13)$$

V (12) nastopajo variacije $\delta\vec{T}$, $\delta\vec{\omega}$ in δp . Te tri variacije niso neodvisne. Velja

$$\delta p = \delta p_0 + \delta Q \vec{R} = \delta p_0 + \delta\vec{\Omega}' \times Q \vec{R} = \delta p_0 + Q \left(\delta\vec{\Omega} \times \vec{R} \right) \quad (14)$$

Tu je $\delta\vec{\Omega}'$ vektor kotne hitrosti variacije δQ , $\vec{\Omega} = Q^T \vec{\Omega}'$ pa osni vektor posevno simetričnega tenzorja $Q^T \delta Q$. Nadalje je $\vec{T} = Q^T \frac{dp_0}{ds}$. Potem

$$\delta\vec{T} = \delta Q^T \frac{dp_0}{ds} + Q^T \frac{d}{ds} \delta p_0 = Q^T \frac{d}{ds} \delta p_0 - \delta\vec{\Omega} \times \vec{T}. \quad (15)$$

Tu smo upoštevali, da je $-\delta\vec{\Omega}$ vektor kotne hitrosti variacije δQ^T . Variacija vektorja kotne hitrosti $\delta\vec{\omega}'$ in vektorja kotne hitrosti variacije δQ nista neodvisna, veže ju enakost $\delta\vec{\omega}' = \frac{d}{ds} \delta\vec{\Omega}' + \delta\vec{\Omega}' \times \vec{\omega}'$. Od tod sledi

$$\delta\vec{\omega} = \frac{d}{ds} \delta\vec{\Omega} + \vec{\omega} \times \delta\vec{\Omega}. \quad (16)$$

4.1 Nevezani problem

V tem primeru je prostor variacij šestrazsežen. Za neodvisni variaciji izberimo $\delta\vec{\Omega}$ in δp_0 . Tako dobimo

$$\delta\vec{M} = Q^T \frac{d}{ds} \delta p_0 - \delta\vec{\Omega} \times \vec{T} + \left(\frac{d}{ds} \delta\vec{\Omega} + \vec{\omega} \times \delta\vec{\Omega} \right) \times \vec{R}. \quad (17)$$

Vstavimo (17) in (14) v (12). Po krajšem računu, tu člena z $\frac{d}{ds} \delta p_0$ in $\frac{d}{ds} \delta\vec{\Omega}$ integriramo per partes, dobimo

$$\begin{aligned} \delta\Psi = & - \int_0^l \left(\frac{d}{ds} Q \int_A \vec{T}^{2PK} dA + \int_A \rho_0 \vec{f} dA \right) \cdot \delta p_0 ds \\ & - \int_0^l \left(\vec{T} \times \int_A \vec{T}^{2PK} dA + \frac{d}{ds} \int_A \vec{R} \times \vec{T}^{2PK} dA - \int_A \vec{R} \times \vec{T}^{2PK} dA \times \vec{\omega} + \int_A \vec{R} \times Q^T \rho_0 \vec{f} dA \right) \cdot \delta\vec{\Omega} ds \\ & + Q \int_A \vec{T}^{2PK} dA \cdot \delta p \Big|_0^l + \int_A (\vec{R} \times \vec{T}^{2PK}) dA \cdot \delta\vec{\Omega} \Big|_0^l. \end{aligned} \quad (18)$$

Če ni dodatnih vezi, sta variaciji δp_0 in $\delta \vec{\Omega}$ neodvisni. Potem iz (18) sledi

$$\vec{0} = \frac{d}{ds} Q \int_A \vec{T}^{2PK} dA + \int_A \rho_0 \vec{f} dA \quad (19)$$

$$\vec{0} = \vec{T} \times \int_A \vec{T}^{2PK} dA + \frac{d}{ds} \int_A \vec{R} \times \vec{T}^{2PK} dA + \vec{\omega} \times \int_A \vec{R} \times \vec{T}^{2PK} dA + \int_A \vec{R} \times Q^T \rho_0 \vec{f} dA. \quad (20)$$

Enačbo (20) lahko preoblikujemo v

$$\vec{0} = \frac{dp_0}{ds} \times Q \int_A \vec{T}^{2PK} dA + \frac{d}{ds} Q \int_A \vec{R} \times \vec{T}^{2PK} dA + \int_A Q \vec{R} \times \rho_0 \vec{f} dA. \quad (21)$$

Če je $\rho_0 \vec{f}$ samo funkcija parametra s , potem pri predpostavki, da je os nosilca centralna os, zadnji člen v (21) odpade. Iz (18) dobimo tudi robne pogoje. Privzemimo, da je nosilec pri $s = 0$ togo vpet, pri $s = l$ pa je prost. Potem iz (18) sledi

$$\int_A \vec{T}^{2PK} dA = \vec{0} \quad \text{in} \quad \int_A \vec{R} \times \vec{T}^{2PK} dA = \vec{0} \quad (22)$$

pri $s = l$. V posebnem primeru, ko je notranja energija linearna funkcija glavnih invariantov sta enačbi izpolnjeni za $\vec{\omega}(s = l) = \vec{0}$ in $\vec{T}(s = l) = \vec{0}$. Ko vstavimo konstitutivne enačbe (10) v (19-20), dobimo dve vektorski enačbi za neznana vektorja \vec{T} in $\vec{\omega}$.

Dobljene enačbe dopuščajo naslednjo interpretacijo. Imenujmo člen

$$\vec{\mathcal{F}} = Q \int_{A(s)} \vec{T}^{2PK} dA$$

prečno silo nosilca, ki je desno od s na del nosilca, ki je levo od s in člen

$$\vec{\mathcal{M}} = Q \int_{A(s)} \vec{R} \times \vec{T}^{2PK} dA$$

kot upogibni moment desnega dela nosilca na levi del. Tako dobimo

$$\frac{d\vec{\mathcal{F}}}{ds} + \int_A \rho_0 \vec{f} dA = \vec{0} \quad \text{in} \quad \frac{dp_0}{ds} \times \vec{\mathcal{F}} + \frac{d\vec{\mathcal{M}}}{ds} + \int_A Q \vec{R} \times \rho_0 \vec{f} dA = \vec{0}. \quad (23)$$

4.2 Vezani problemi

Omejimo se na primer, ko variacija δT ni poljubna. Privzeli bomo, da je \vec{T} omejen z družino vezi oblike $g_i(\vec{T}) = 0$. Primeri vezi so, pogoj nestisljivosti $T_1(s) = 1$, pogoj, da je centralna os tudi nevtralna os $|\vec{T}| = 1$, pogoj, da preseki pravokotni na centralno os v referenčnem položaju ostanejo pravokotni na deformirano centralno os $T_2(s) = T_3(s) = 0$.

Ker variacija $\delta \vec{T}$ ni poljubna, ni poljubna niti δp_0 . V tem primeru je zato bolje, če zapišemo variacijo $\delta \Psi$ kot linerano formo variacij $\delta \vec{T}$ in $\delta \vec{\Omega}$. V ta namen izračunajmo

$$\begin{aligned} \int_B \rho_0 \vec{f} \cdot \delta p_0 dV &= \int_B \rho_0 \vec{f} \cdot \delta \int_0^s Q(s') \vec{T}(s') ds' dV \\ &= \int_0^l \left(\delta(Q(s) \vec{T}(s)) \cdot \int_s^l \int_{A(s')} \rho_0 \vec{f} dA ds' \right) ds \\ &= \int_0^l \left(\delta \vec{\Omega} \times \vec{T} + \delta \vec{T} \cdot Q^T \int_s^l \int_{A(s')} \rho_0 \vec{f} dA ds' \right) ds. \end{aligned} \quad (24)$$

Vezi $g_i(\vec{T}) = 0$ vključimo v energijski funkcional z Lagrangeevimi množitelji λ_i . Potem

$$\begin{aligned}\delta\Psi &= \int_0^l \left(\int_{A(s)} \vec{T}^{2PK} dA - Q^T \int_s^l \int_{A(s')} \rho_0 \vec{f} dA ds' + \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial \vec{T}} \right) \cdot \delta \vec{T} ds \\ &- \int_0^l Q^T \left(\frac{d}{ds} Q \int_A \vec{R} \times \vec{T}^{2PK} dA + \int_A Q \vec{R} \times \rho_0 \vec{f} dA + \frac{dp_0}{ds} \times \int_s^l \int_{A(s')} \rho_0 \vec{f} dA ds' \right) \cdot \delta \vec{\Omega} ds \\ &+ \left. \int_A (\vec{R} \times \vec{T}^{2PK}) dA \cdot \delta \vec{\Omega} \right|_0^l.\end{aligned}\quad (25)$$

Tu smo uporabili sumacijsko konvencijo po ponavljajočem indeksu i . Iz (25) sledi

$$\vec{0} = \int_{A(s)} \vec{T}^{2PK} dA - Q^T \int_s^l \int_{A(s')} \rho_0 \vec{f} dA ds' + \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial \vec{T}} \quad (26)$$

$$\vec{0} = \frac{d}{ds} Q \int_A \vec{R} \times \vec{T}^{2PK} dA + \int_A Q \vec{R} \times \rho_0 \vec{f} dA + \frac{dp_0}{ds} \times \int_s^l \int_{A(s')} \rho_0 \vec{f} dA ds'. \quad (27)$$

Pripadajoči robni pogoj je $\int_A \vec{R} \times \vec{T}^{2PK} dA = \vec{0}$. Če ni vezi, je $\lambda_i = 0$ in dobljena robna naloga je ekvivalentna robni nalogi (19), (21), (22).

5 Ravninski problem

Privzemimo, da je deformacija nevtralne osi omejena na ravnino z normalo \vec{E}_2 in da so možne rotacije samo okrog osi \vec{E}_2 . Tako dobimo ravninski upogib nosilca. Če ni dodatnih vezi, so komponente \vec{M} neodvisne in tako tudi v tem primeru veljajo konstitutivne enačbe (10). V primeru dodatnih vezi pa komponente niso neodvisne. V primeru nestisljivosti $T_1(s) = 1$ je $\dot{\vec{M}} = X_3 \dot{\vec{\Omega}}_2 \vec{E}_1 + \dot{T}_3 \vec{E}_3$. Iz (6), (8) in (9) potem sledi

$$\begin{aligned}T_{11}^{2PK} &= \rho_0 \left(2 \frac{\partial u}{\partial I_5} (T_3^2 + (1 + X_3 \omega_2)^2) + \frac{\partial u}{\partial I_1} + 2 \frac{\partial u}{\partial I_2} + \frac{\partial u}{\partial I_3} + \frac{\partial u}{\partial I_4} \right) \\ T_{13}^{2PK} &= -T_3 \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial I_2} + \frac{\partial u}{\partial I_3} - \frac{\partial u}{\partial I_5} \right).\end{aligned}\quad (28)$$

Dobljene enačbe se ujemajo z enačbami (10) pri vrednostih $T_1 = 1$ in $T_2 = \omega_1 = \omega_3 = 0$. Konstitutivna relacija tokrat ne določa T_{12}^{2PK} . Pripadajoči robni pogoj na prostem robu je $T_3 = \omega_2 = 0$.

V primeru, da je centralna os hkrati tudi nevtralna, velja (10), tokrat za $T_3 = \sqrt{1 - T_1^2}$ in $T_2 = \omega_1 = \omega_3 = 0$. Nosilec ima lahko tudi nevtralno os in je hkrati nestisljiv. Potem $T_1 = 1$ in $T_2 = T_3 = \omega_1 = \omega_3 = 0$. V tem primeru T_{12}^{2PK} in T_{13}^{2PK} nista določena s konstitutivnimi relacijami.

Oglejmo si pobližje ta zadnji primer. Edina prostostna stopnja je $\omega_2 = \psi'$, kjer je $\psi = \psi(s)$ kot rotacije okrog osi \vec{E}_2 . Ravnovesna enačba je projekcija enačbe (27) na os \vec{E}_2 . Privzemimo, da je notranja energija u linearna funkcija glavnih invariantov, torej $u = \alpha_k I_k$. V obravnavanem primeru so glavne invariante dane z $I_1 = X_3^2 \psi'(s)^2 + 2X_3 \psi'(s) + 3$, $I_2 = 2X_3^2 \psi'(s)^2 + 4X_3 \psi'(s) + 3$, $I_3 = I_4 = (X_3 \psi'(s) + 1)^2$, $I_5 = (X_3 \psi'(s) + 1)^4$. Nadalje privzemimo, da je nosilec homogen

in ima konstanten kvadratni presek z dolžino stranice a . Specifična gostota volumenske sile naj bo $\vec{f} = f\vec{E}_3$, kjer je f konstanta. Dodatno privzemimo, da je centralna pri $s = l$ točkovno obremenjena v smeri osi \vec{E}_3 z intenziteto $\rho_0 f_0$. Potem

$$\begin{aligned}\Psi &= \int_B \rho_0 \left(u(\underline{\underline{C}}) - \vec{f} \cdot (p - o) \right) dV - \int_{A(s=l)} \rho_0 \vec{f}_0 dA \cdot p_0(s=l) \\ &= \int_0^l \left(a^2 \rho_0 \sin(\psi(s)) (f(l-s) + f_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{60} a^4 \rho_0 \psi'(s)^2 \left(\frac{3}{4} a^2 \alpha_5 \psi'(s)^2 + 5(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + 6\alpha_5) \right) \right) ds.\end{aligned}\quad (29)$$

Omenimo, da primer $\alpha_5 = 0$ ustreza Mooney-Rivlinovemu modelu. Ravnovesna enačba, ki jo dobimo direktno iz (29) ali iz (27) je

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{60} a^4 \rho_0 \psi''(s) (9a^2 \alpha_5 \psi'(s)^2 + 10(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + 6\alpha_5)) \\ &\quad - a^2 \rho_0 \cos(\psi(s)) (f(l-s) + f_0),\end{aligned}\quad (30)$$

z robnim pogojem $\psi(s=0) = 0$ in $\psi'(s=l) = 0$. Dobili smo natanko Euler-Lagrangeovo enačbo funkcionala (29). Če odvajamo (30) po s , postavimo $\psi = -\frac{dw}{ds}$, privzamemo $|\frac{dw}{ds}| \ll 1$ in ohranimo za $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$ samo vodilni člen, dobimo Euler-Bernoullijevo enačbo upogiba nosilca z $\alpha_1 = \frac{1}{2}E$, kjer je E Youngov modul.

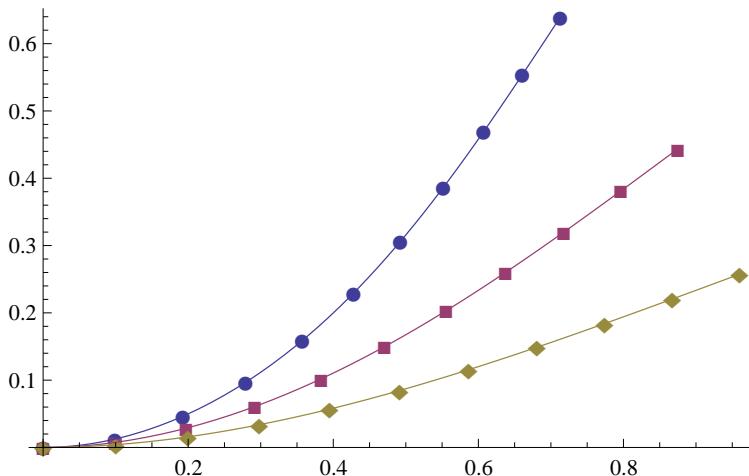
Robno nalogi (30) lahko numerično rešimo brez težav za $|f| + |f_0| \ll 1$. Za ilustracijo je na sliki 1 podan položaj deformirane nevtralne osi za različne vrednosti parametra α_1 pri brezdimenzijskih vrednostih $f = f_0 = 1/10$, $l = 1$, $a = 1/10$ in $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$. Pri večjih vrednostih nastopijo težave, ker sta robna pogoja na nasprotni strani. Numerične težave nastopajo tudi pri $\alpha_5 = 0$ in $f = 0$. V tem primeru se enačba glasi $0 = -\alpha \cos \psi + \psi''$, kjer je $\alpha = 6f_0/(a^2(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4))$. Privzemimo $\alpha > 0$. Enačba pri danih robnih pogojih nima znane analitične rešitve. Problem je ponovna prisotnost robnih pogojev na nasprotnih koncih nosilca. Če opustimo robni pogoj pri $s = l$, je rešitev

$$\psi = \frac{1}{2} \left(\pi - 4 \operatorname{gd} \left(\frac{s\sqrt{\alpha}}{l} + \sinh^{-1}(1) \right) \right), \quad (31)$$

kjer je $\operatorname{gd}(x)$ Gudermannova funkcija dana z $\operatorname{gd}(x) = \arctan \sinh x$. Za $\alpha \gg 1$ je pogoj $\psi'(l) = 0$ asimptotično izpolnjen. Za rešitev (31) velja $\psi'(s=0) = -\sqrt{2\alpha}$. Ta rezultat lahko koristno uporabimo kot začetni približek pri numeričnem reševanju (30) pri velikih prečnih obremenitvah.

6 Zaključne opombe

Stacionarne enačbe so nelinearen sistem navadnih diferencialnih enačb. Njeno numerično reševanje ni enostavno. Možnost, ki jo tu podrobnejše zaradi pomanjkanja prostora ne obravnavamo, je uporaba Legendrove transformacije, ki Euler-Lagrangeeve enačbe prevede v kanonski sistem, glej naprimer [5]. Vendar tudi v tem primeru ostane problem z robnimi vrednostmi



Slika 1 : Nevtralna os za $\alpha_1 = 100(\blacklozenge), 50(\blacksquare)$ in $25\bullet$.

na različnih koncih nosilca. V primeru, ko je rešitev stacionarnih enačb minimum energijskega funkcionala, pa lahko rešitev dobimo z minimizacijo. Tu pri numeričnem računanju priporočamo uporabo Hermitskih elementov. Omenimo, da smo tako, brez posebnih težav, izračunali prostorski upogib nosilca z Mooney-Rivlinovim materialnim modelom.

Literatura

- [1] A. Bertram, *Elasticity and Plasticity of Large Deformations. An Introduction*, Springer, Berlin, 2005.
- [2] H. Irschik in J. Gerstmayr *A continuum mechanics based derivation of Reissner's large-displacement finite-strain beam theory: the case of plane deformations of originally straight Bernoulli–Euler beams*, Acta Mech 206, 1–21 (2009).
- [3] G. A. Holzapfel, *Nonlinear Solid Mechanics. A Continuum Approach for Engineering*, Wiley, Chichester, 2000.
- [4] E. Reissner, *On finite deformation of space-curved beams*, J. Appl. Math. Phys. 32, 734–744, 1981.
- [5] W. Yao, W. Zhong in C .W .Lim, *Symplectic Elasticity*, World Scientific, New Jersey, 2009.



Effect of heating on fibers shrinkage.

I. Saprunov¹, R.Simonyantc^{1,2}, I. Emri¹

Abstract

Automated measurement of the fiber shrinkage while it is subjected to various controlled thermal histories is of great importance to understanding the complexity of fiber's structure. Accurate time-dependent information on shrinkage dynamics may be used for studying the effect of processing and materials on structure formation of polymer fibers. Development of the digital image acquisition and analysis system capable to acquire and provide such information is described here. The effect of the same temperature history on shrinkage behavior of the three different fibers was studied. It was found that the rate of shrinking was dissimilar, which indicates that the effect of temperature on inherent structural changes in fibers. Experiments were also performed to demonstrate that the small change in one of the processing parameters during manufacturing process may result in the significant change in material structure and consequently in the shrinking properties of the fibers.

It was used for analysis of the fibers produced at two different rotational velocities of the pulleys. The measured shrinkage indicates that fibers have significantly different structures depending on the small modification in the processing. This proves that the processing conditions have significant effect on fiber structure and its shrinking.

1 Introduction

Fibers are produced worldwide in enormous quantities. More than 30 million tons of synthetic fibers are manufactured each year [1]. A characteristic feature of a fiber is that its length is much greater than its diameter. The great anisotropy of the microstructure and the physical properties originating from spinning and stretching processes are two of the main reasons for the special properties and peculiarities of fibers [2].

Spinning, stretching and annealing are the most important steps in the manufacture of fibers. These processes and the raw material determine time-dependent properties of fibers that are required for the planned application. Thermal stability, shrinkage (contraction of fibers) and coloring properties are determined by the size, number and orientation of the crystallites, as well as the molecular structure of the amorphous regions [3].

Thermomechanical analysis (TMA), dynamic mechanical analysis (DMA), differential scanning calorimetry (DSC) and thermogravimetric analysis (TGA) are commonly used techniques for the investigation of the effects of temperature and mechanical loading on fibers and yarns [4]. Very often comparative measurements under identical conditions are sufficient to characterize transition temperatures, expansion and shrinking behavior. TMA measurements also yield numerical values such as the coefficient of linear expansion, Young's modulus, $E_0 = E(t = 0)$, and the force of contraction as a function of temperature. However, these techniques do not provide sufficient information on shrinkage dynamics, i.e., time-dependent changing of fibers geometry as function of their temperature history. The time-dependency (kinetics) of fiber shrinkage is an integral result of the complexity of its

structure and may be used as a tool in the optimization of spinning technology and material development [5].

The fiber structure consists, in principle, of three distinct components: elasto-viscoplastically deformed long chains, the crystalline phase and the remaining amorphous phase. The shrinking of fibers is a consequence of the frozen-in elastic deformation of long chains, which is released upon heating the fiber.

Fiber shrinkage is normally used as one of the criteria to characterize fiber performance. The amount of fiber shrinkage depends on both the material, from which it was made, and the processing technology. Shrinkage is commonly measured according to standard procedures [6]. In most cases they consist of measuring the initial length of the fiber, exposing the fiber to boiling water or hot air for certain period of time, without taking into account the rate of temperature change, and afterwards measuring the final length. From the change in length the magnitude of shrinkage is then obtained. Standard methods are usually used for the quality control of yarns in industry. These methods, however, do not provide sufficient information for studying the interrelation between the material structure, processing conditions and macroscopic properties of fibers.

In this paper we present a simple experimental technique for studying shrinkage dynamics of fibers exposed to different controlled temperature histories. The developed method is based on optical non-contact measurements of the fiber gage length during its exposure to different controlled thermal conditions. The method enables real time shrinkage measurements, which may be used to study:

- shrinkage dynamics;
- the initiation of shrinkage;
- interrelation between the temperature history and the shrinking process;
- the underlying mechanisms governing the shrinkage dynamics;
- how does material structure affects the shrinking process;
- how does production technology effect the structure and consequently the shrinkage dynamics;

2 Experimental setup

Experimental setup consists of the components providing functional integrity for the measuring system. One component of the setup is the storage and specimen preparation chamber where the fibers are stored at sufficiently low temperature to prevent any structural changes of the material. The storage temperature depends on the material from which fibers are manufactured. For example, polyamide fibers require storage temperature below -25°C. The samples must be prepared at the same temperature conditions. At these conditions the fibers are cut to the predefined length, about 100 mm in this study, and attached to the holding frame in the specimen preparation chamber. Each frame contains three fibers, arranged in parallel, to assure that during the experiment they will be exposed to the same temperature histories. Each fiber has two gage markers attached to it. The thin strip of black self adhesive paper is used as a marker, **Figure 1**.

Each fiber has a small weight (0.16 g) attached to its end to keep it straight during the experiment. The gage markers are placed between the guide wires designed to prevent rotation of the gage markers.

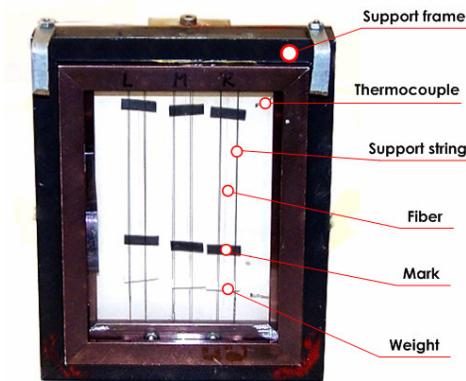


Figure 1. Three fibers with gage marks attached to the holding frame. Each fiber has a small weight (0.16 g) attached to its end to keep it straight.

When conducting the experiments starting from sub-ambient temperatures the fiber begins to shrink as soon as it is exposed to temperature higher than -15°C . By enclosing the fiber attached to the holding frame in the cold closed box, the fiber is safely protected during the transfer from the preparation chamber to the thermal chamber. The holding frame has just enough heating capacitance to keep the fiber temperature below -18°C during the time needed to transfer the frame from the preparation chamber to the thermal chamber.

The frame with three fibers is placed in the thermal chamber where fiber samples are exposed to different, accurately monitored, temperature histories. The temperature of each of the three fibers is measured by a thermocouple placed in the close proximity to the fiber.

The thermo camera (Thermovision 550³) was used to verify that the temperature measured by the thermocouple represents the actual temperature of the fiber.

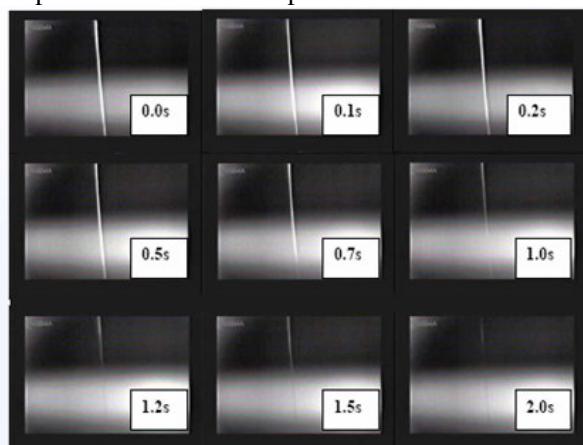


Figure 2. Natural cooling of a PA 6 fiber (from 120°C to 16°C , cooling time 2s).

The free hanging fiber was heated by hot air gun to 120°C . Time 0.0 s corresponds to the moment when the fiber reached the temperature of 120°C . At this time the heating was

stopped and the natural cooling process was monitored by the thermo camera. Nine images were recorded and are shown in **Figure 2**. As seen from this figure the fiber gradually stopped to be visible in the image as its temperature was approaching the surrounding temperature. Fiber has cooled down to the surrounding temperature of 16°C in about 2 seconds, therefore the response times of the fiber was found to be under 20 milliseconds per degree Celsius. For the thermocouple (type K) similar experiment has been performed and the rate of 50 milliseconds per degree Celsius was detected. Since the response time of thermocouple was twice as fast as image sampling rate (10-12 Hz) and faster than the rate of applied temperature change it is clear that the thermocouple has an adequate time response for this experiment.

The actual shrinkage of the fiber is monitored by a CCD camera and processed and digitized (A/D) on-line by a digital image acquisition (IMAQ) system developed for this purpose.

3 Optical technique for Measuring Fiber Shrinkage.

The described here technique for evaluation of the fiber shrinkage is based on the detection of the relative movement of two gage markers attached to the fiber as a function of time and temperature of the fiber. As described above, the fiber was mounted in the specially build frame that was installed in the heating chamber and observed through the glass window. The image analysis system consists of a IMAGINESOURCE DF03 CCD camera (1024 x 768 pixels), capable to digitized the signal with 8-bit gray scale level (256 shades of gray scale) connected to a PCI Fire-Wire card. Camera is equipped with interchangeable high precision manual zoom lens, which could cover a wide range of specimen – camera configurations. The lens used is designed for 1/3" CCD sensor and has focal length 5 – 40 mm and maximum aperture ratio of F1.6. Overall field of view depends upon the focal length of the lens and the distance between the camera and the specimen. The in-house developed software allowed acquiring the image, processing it in the real time, and extracting the distance between the gage markers. The actual data sampling rate was 12 Hz, this included image acquisition, processing and storing the data. Since gage markers were black, it was relatively easy to separate them from the white background. Figure 3a shows the image of the fiber with two gage markers attached to it. The obtained image was digitized and only the central part containing the fiber and two markers was analyzed **Figure 3.a and Figure 3.b**. It was not possible to assure parallel placement of the gage markers. To account for this effect, an average of 50 consecutive scan lines was calculated. A light intensity distribution along 1 searching line is presented in **Figure 3.c**. Since we utilized averaging procedure, the resultant scan (**Figure 3c**) does not have sharp transitions from black to white at the markers borders. To overcome this problem and achieve the subpixel resolution of measurements a simple procedure based on the calculating the centroid of the markers image areas was utilized. The centroid of each marker was computed using the grey scale values [7].

The spatial resolution of the optical system was determined by comparing the results generated by the above described image acquisition and processing system versus displacement measured by a micrometer. One marker was attached to the stem of the micrometer, while the second was attached to the fixed base. Moving the stem of the micrometer by a given displacement set the position of the first marker. The calibration procedure was as follows.

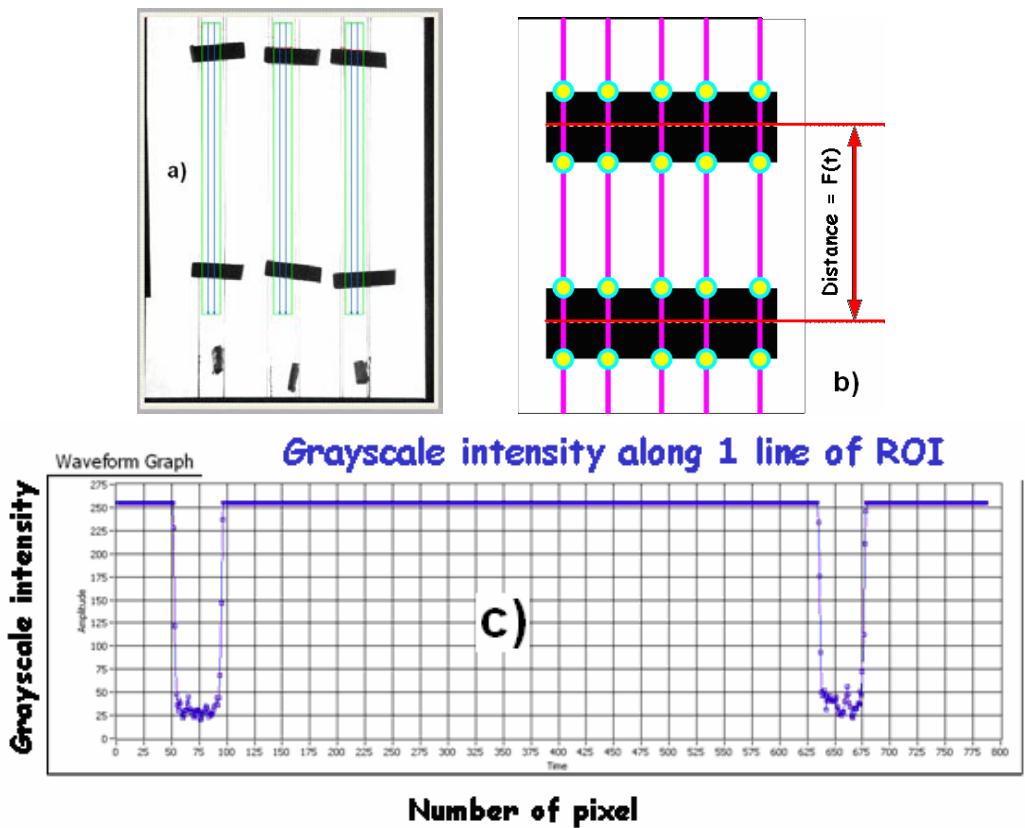


Figure 3.a) Real image from camera; b) Subpixel edge detection method; c) Grayscale profile along 1 searching line.

The marker was brought to a certain position, i.e., 1.5 mm. At this location the image was acquired and the distance from the base was evaluated by described above image processing procedure. The marker was brought back to the base, repositioned to the same location and the second reading was obtained.

The same person repeated this process 20 times for a given displacement. The results were obtained by 10 different operators, each performing 20 repetitions; therefore the results include both operator and equipment errors. **Figure 4.a** shows the results of the 200 reading of a selected position of the marker as measured by the optical system. The maximum deviation in 200 readings was 0.11 pixel, which represents the absolute error of the distance measurements using the developed optical system. The conversion factor between the actual distance and pixel reading was also established from these experiments. The linear correspondence between the micrometer reading and the image analysis system output is shown in **Figure 4.b**. During the fiber shrinkage tests optical system was setup such so the minimal distance between the markers was over 400 pixels. Therefore, the relative error of distance measurements was 0.025%. The error bars in **Figure 4.b** cannot be seen since they are smaller than the thickness of the dots indicating the measured data. The straight line fitted to the measured data shows excellent linearity and high degree of correlation, as

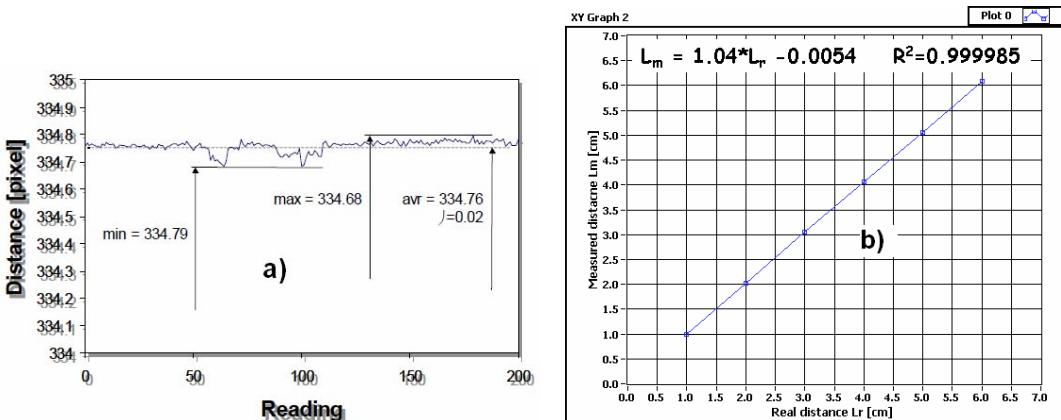


Figure 4. a) – repeatability of measurements; b) Linearity of measuring technique;

4 Results of shrinkage measurements

The described optical system was developed to study the effects of various parameters on the fiber shrinkage. Since the shrinkage is related to the inherent structure of the fiber, study of the shrinkage dynamics may provide insights into fiber structure and may be used in the process of material development and spinning process optimization.

The fibers are produced by the spinning processes in which melted material is extruded and drawn with high velocity thought the cooling duct by three pulleys. The fiber is solidified in the cooling duct and cold drawn between the pulleys. The residual stresses built up in this process are released in the steam chamber, where fiber is exposed to the pressurized steam. The fiber is then winded onto the winder. In the production the processing conditions are determined by the temperature of the extruded melt, temperature gradient in the cooling duct, the rotational velocity of the three pulleys and the pressure of the steam in the steam chamber.

Here we demonstrate the effect of the heating history on fiber shrinkage dynamics, and we show the effect of fiber processing conditions on its shrinkage.

Fibers made of commercial polyamide 6, BS400N, produced by BASF were attached to the holding frame following the described above procedure. The frame was placed in the heating chamber and the fibers were subjected to one of the two different heating rates between the initial temperature $T_0 = -25^\circ\text{C}$ to the final temperature of $T_f = 50^\circ\text{C}$. The results in **Figure 5** confirm the ability of the developed system to distinguish the effects of different thermal histories on the shrinkage dynamics of fibers. It is clear that the heating history affects the rate and the total magnitude of fiber shrinkage. It should be emphasized that using results generated by the standard method, that considers only the temperature difference and not the heating rates, may lead to the wrong conclusions about the fiber's response to the applied temperature.

Next example shows the effect of the same temperature history (heating from -22°C to 138°C) on shrinkage behavior of the three fibers made from two different commercial materials PA6, BS400N and PA66, AS2500S, produced by BASF, and mixture of both materials, indicated as PA6+PA66.

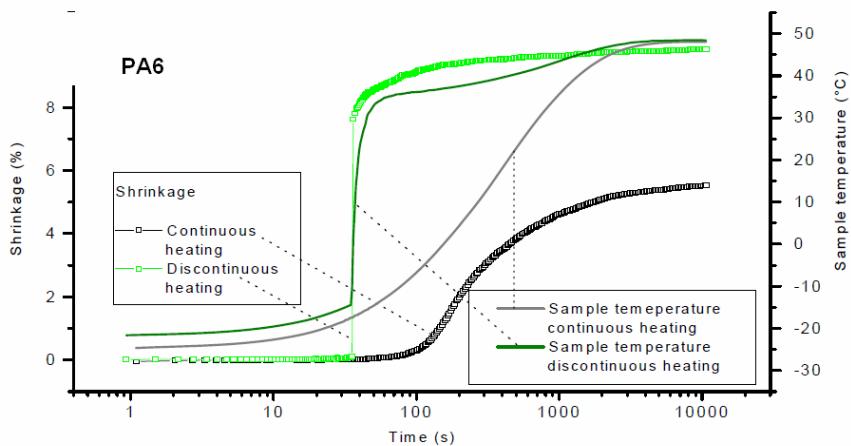


Figure 5. Effect of temperature rate on the fiber shrinkage.

The results show the evolution of strain process (scale opposite to shrinkage) as function of time (**Figure 6**). From this Figure two immediate observations could be made. First, the total shrinkage of the three fibers is significantly different; however this effect may also be observed using a standard method of testing.

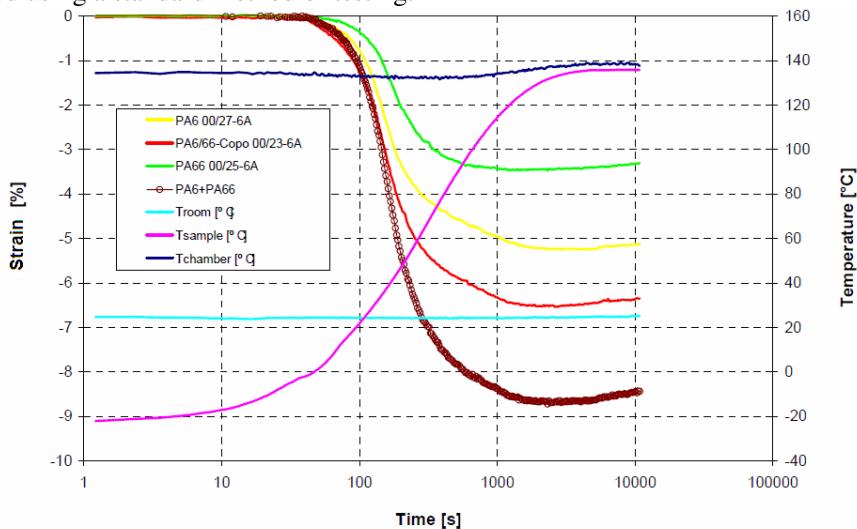


Figure 6. Strain of fibers made of three different materials.

Second, the rate of shrinking is dissimilar, which indicates that the effect of temperature on inherent structural changes in fibers must be different. It is important to note that the fibers made from the mixture of both materials behaved significantly different than those made from the neat materials. It should be stressed that using a simple rule of mixing to predict shrinkage of fibers would place the curve somewhere in between the shrinkage curves for each of the neat materials. Rule of mixture does not account for various procedures used in fiber production, thus resulting in different internal structure and, consequently, different shrinkage behavior. Thus the processes related to structure formation of fibers and their

interactions are strongly nonlinear and consequently their properties may not be predicted using linear approaches.

5 Discussion and Conclusions

The described here optical measuring system based on the well developed approaches of the digital image analysis and acquisition represents a new tool for studying the shrinkage dynamics of fibers. The presented approach opens new possibilities in study of the effects of materials and of processing conditions on the inherent structure of fibers.

Recent study of the fiber structure by electron paramagnetic resonance [8] showed that fibers produced at two different rotational velocities of the pulleys have significantly different structures. This proves that the processing conditions have significant effect on fiber structure and its shrinking behavior. The presented here optical methodology was able to detect the effect of the same processing condition on the fiber shrinkage. It should be noted that the study of the fiber structure by electron paramagnetic resonance is extremely expensive process. Such equipment is available only at very few physics research centers. Also, the study of the fiber structures by electron paramagnetic resonance was less sensitive to the changes in processing conditions than the optically measured shrinkage.

The hardware utilized in the present system was capable of acquiring and processing data at 12Hz sampling rate, which was adequate for tested heating rates. Even when the fibers were exposed to temperature jumps (**Figure 5**), the temporal resolution was high enough. Future development of the system will utilize superior and faster image acquisition cameras and will require thermocouples with faster temporal response.

In conclusion, the presented here optical system based on the digital image acquisition and processing may well become an industrial standard tool to study the effects of processing conditions and materials on the inherent structure of the fiber.

Literature

- [1] Stepanski M. And Rutti A. “*Improving the production process of the most popular man made fiber.*” Sulzer Technical Review 2, 2003. 1-6.
- [2] Salem DR (2001) *Structure formation in polymer fibers.* Carl Hanser Verlag, Germany, pp 521–552.
- [3] Aharoni SM (1997) *n-Nylons: Their synthesis, structure and properties.* Wiley, New York.
- [4] Thermal Characterization of Polymeric Materials, Ed. Edith A. Turi, Academic Press, 1997.
- [5] Emri I., and B.S. von Bernstorff, “*The Effect of Molecular Mass Distribution on Time-dependent Behavior of Polyamides*”, Journal of Applied Mechanics, September 2006, Volume 73, Issue 5, 752 (6 pages).
- [6] ASTM D 2259-02, ASTM D 2102-02, ASTM D 4974-99, ASTM D5104-02, DIN 53 866, EN 13844.
- [7] Clarke, T.A. Robson, S. & Chen, J. 1993 *A comparison of three techniques for the 3-D measurement of turbine blades.* ISMTII, Wuhan, China, SPIE Vol 2101, pp. 1-12.
- [8] Cevc P, ArconD, Blinc R, Emri I (2005) *Electron paramagnetic resonance of stressed fiber nylon6: Annealing effects.* J Phys D Appl Phys 38:2299–2301.



Analiza postkritičnega obnašanja delaminiranih prostorskih nosilcev z upoštevanjem kontakta

U. Rodman¹, M. Saje¹, I. Planinc¹ in D. Zupan¹

Postcritical analysis of delaminated spatial beams considering contact problem

Povzetek. V prispevku je predstavljena numerična analiza delaminiranih nosilcev z upoštevanjem kontakta med lamlami. Preprečitev prekrivanja laml in opis nelinearnih pogojev na stiku modeliramo z nelinearnimi prostorskimi vzmetmi. Model vzmeti ustrezno upošteva velike pomike in zasuke nosilcev. Ustreznost postopka je prikazana na nekaj računskih primerih.

Abstract. The article presents the analysis of delaminated beams, considering the contact problem between lamina. Overlapping and nonlinear conditions at the delamination are modeled by using adequate nonlinear spatial springs. Model of spring takes into account finite rotations and displacements of the beam. The present approach is demonstrated on several numerical examples.

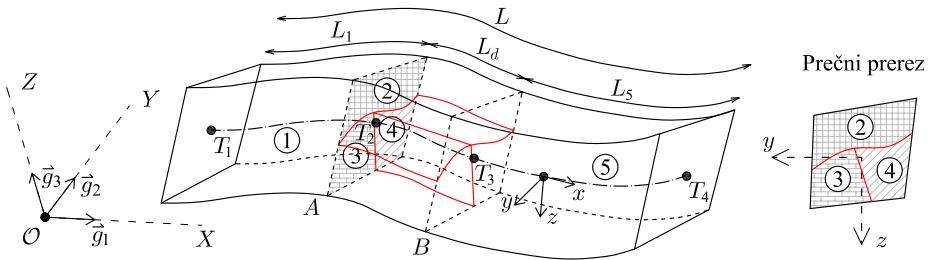
1 Uvod

V prispevku obravnavamo delaminirane prostorske nosilce, ki so obremenjeni z osno in prečno obtežbo. Analiziran je vpliv delaminacij na postkritično obnašanje nosilcev, s poudarkom na modeliranju nelinearnega kontakta med lamlama. Predstavljena je primerjava obtežno-deformacijskih krivulj brez in z upoštevanjem kontakta.

2 Model

Numerična analiza delaminiranih nosilcev temelji na sodobnih geometrijsko točnih prostorskih linijskih končnih elementih, ki sta jih zasnovala Zupan in Saje [3], [4]. Za sledenje obtežno-deformacijskim krivuljam v postkritično območje uporabimo modificirano metodo ločne dolžine, ki jo podajajo Feng, Perič in Owen [1]. V našem modelu predpostavimo, da je delaminacija znana v začetnem stanju in da se razpoka ne širi. Delaminacije so modelirane kot ločeni elementi z ustreznimi povezavami in robnimi pogoji (glej sliko 1).

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Gradbeništvo in Geodezijo



Slika 1: Model nosilca z dvema delaminacijama enake dolžine.

Nelinearne kontaktne pogoje na stiku med lamelama opišemo s prostorskimi vzmetmi. Ker se konstrukcija med delovanjem obtežbe lahko močno deformira, moramo model vzmeti prirediti velikim pomikom in zasukom. Tako točkovno vzmet opišemo v lokalnih koordinatah. Če točki, ki jih povezuje vzmet, označimo z indeksi I in II , pripadajoča pomika v lokalnih koordinatah pa z \mathbf{u}_G^I in \mathbf{u}_G^{II} , lahko silo v vezi opišemo kot funkcijo razlike relativnih pomikov povezanih točk:

$$\mathbf{F}_G = \mathcal{V}(\mathbf{u}_G^I - \mathbf{u}_G^{II}) = \mathcal{V}(\Delta\mathbf{u}_G), \quad (1)$$

pri čemer smo z $\Delta\mathbf{u}_G$ označili spremembo relativnih pomikov. V primeru linearne vezi dobi operator \mathcal{V} preprosto linearno obliko

$$\mathbf{F}_G = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \Delta\mathbf{u}_G. \quad (2)$$

Bilinearna vez je razširitev, kjer so koeficienti k_i odvisni od predznaka pripadajoče komponente $\Delta\mathbf{u}_G$, torej jo določa šest konstant. Opozorimo, da že tako preprost model omogoča preprečitev prekrivanja lamel, kar dosežemo z velikimi togostmi za negativne vrednosti komponent $\Delta\mathbf{u}_G$ (tlačne vzmeti), v model pa vključimo splošnejšo, odsekoma linearno vzmet.

Če želimo enačbe vzmeti dodati enačbam konstrukcije, jih moramo zapisati v ustrezni obliki. Enačbe, ki jih rešujemo na nivoju konstrukcije, predstavljajo ravnotežne enačbe vozlišč konstrukcije v fiksni bazi, pripadajoče neznanke pa so vozliščni pomiki in zasuki, prav tako zapisani v fiksni bazi. V splošnem je lahko lokalni koordinatni sistem prerezov, ki jima pripadata povezani točki, različen. Zato se odločimo za jasno razdelitev obeh točk. Prva z oznako I naj bo referenčna, nanjo je vez togo pripeta. Torej se vzmet vrati skupaj z vrtenjem lokalnega koordinatnega sistema v točki I . Druga točka je zgolj pripeta na vzmet, lokalne koordinate v točki pa so neodvisne od lege vzmeti. V tem duhu preoblikujemo enačbo (2). Razliko pomikov "merimo" v fiksni bazi:

$$\Delta\mathbf{u}_g = \mathbf{u}_g^I - \mathbf{u}_g^{II}, \quad (3)$$

vendar za uporabo koeficientov vzmeti v naravni (lokralni bazi) to razliko transformiramo v skladu z lokalnim koordinatnim sistemom, pripetim na referenčno točko I . Po koordinatni transformaciji dobimo:

$$\Delta \mathbf{u}_G = \mathbf{R}_I^T \Delta \mathbf{u}_g = \mathbf{R}_I^T (\mathbf{u}_g^I - \mathbf{u}_g^{II}). \quad (4)$$

Če komponente $\Delta \mathbf{u}_G$ pomnožimo z ustreznimi togostmi, dobimo sile v vezi, vendar izražene v lokalni bazi

$$\mathbf{F}_G = \mathbf{k}_V \Delta \mathbf{u}_G, \quad (5)$$

pretvorba v fiksno bazo pa je določena z rotacijsko matriko v točki I :

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{R}_I \mathbf{F}_G = \mathbf{R}_I \mathbf{k}_V \Delta \mathbf{u}_G \quad (6)$$

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{R}_I \mathbf{k}_V \mathbf{R}_I^T (\mathbf{u}_g^I - \mathbf{u}_g^{II}). \quad (7)$$

Enačba (7) je sedaj v primerni obliki, usklajeni z ostalimi enačbami na nivoju konstrukcije. Na nivoju enačb tako (7) preprosto prištejemo na ustrezna mesta. Zaradi reševanja enačb z Newtonovo metodo pa moramo enačbo (7) še linearizirati in ustrezne člene dodati tangentni matriki konstrukcije.

Linearizacija mora ustrezno upoštevati nelinearnost prostorskih rotacij. Neposredna linearizacija enačbe (7) je oblike

$$\delta \mathbf{F}_g = \delta \mathbf{R}_I \mathbf{k}_V \mathbf{R}_I^T (\mathbf{u}_g^I - \mathbf{u}_g^{II}) + \mathbf{R}_I \mathbf{k}_V \delta \mathbf{R}_I^T (\mathbf{u}_g^I - \mathbf{u}_g^{II}) + \mathbf{R}_I \mathbf{k}_V \mathbf{R}_I^T (\delta \mathbf{u}_g^I - \delta \mathbf{u}_g^{II}). \quad (8)$$

Variacijo lahko izrazimo z osnovnimi neznankami problema

$$\delta \mathbf{F}_g = \delta \Theta_I \mathbf{R}_I \mathbf{k}_V \mathbf{R}_I^T \Delta \mathbf{u}_g + \mathbf{R}_I \mathbf{k}_V \mathbf{R}_I^T \delta \Theta_I^T \Delta \mathbf{u}_g + \mathbf{R}_I \mathbf{k}_V \mathbf{R}_I^T (\delta \mathbf{u}_g^I - \delta \mathbf{u}_g^{II}) \quad (9)$$

$$= \delta \Theta_I \mathbf{k}_{Vg} \Delta \mathbf{u}_g + \mathbf{k}_{Vg} \delta \Theta_I^T \Delta \mathbf{u}_g + \mathbf{k}_{Vg} (\delta \mathbf{u}_g^I - \delta \mathbf{u}_g^{II}), \quad (10)$$

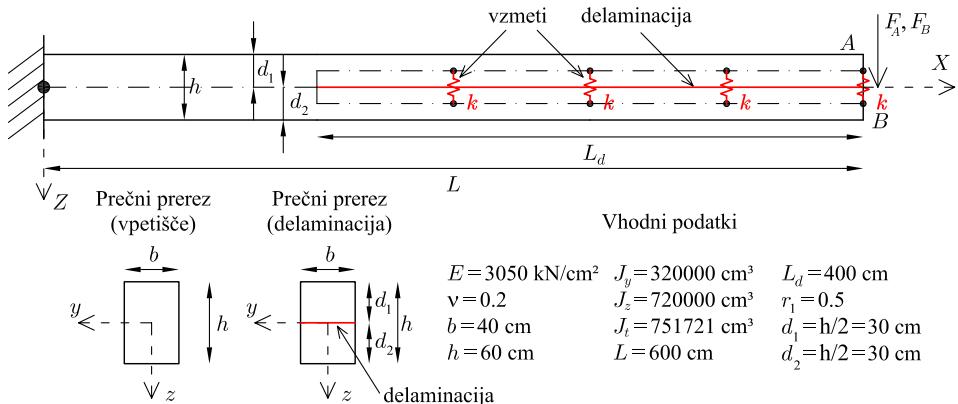
kjer smo s \mathbf{k}_{Vg} označili matriko togosti vzmeti v fiksni bazi in z $\delta \Theta$ variacijo rotacijskega operatorja.

Na kratko pojasnimo prispevek vezi k shemi tangentne matrike in desnih strani sistema enačb konstrukcije. Vez povezuje točki I in II . Če torej vozlišče II vpliva na vozlišče I s silo \mathbf{F}_g , vpliva prvo vozlišče na drugo z nasprotno enako silo $-\mathbf{F}_g$. Na mestih v vektorju desnih strani, ki pripadajo indeksom pomikov vozlišča I , torej prištejemo \mathbf{F}_g^{III} . Na mestih, ki pripadajo indeksom pomikov vozlišča II , pa $\mathbf{F}_g^{I\,II}$ odštejemo. Podobno postopamo pri gradnji tangentne matrike.

3 Računski primeri

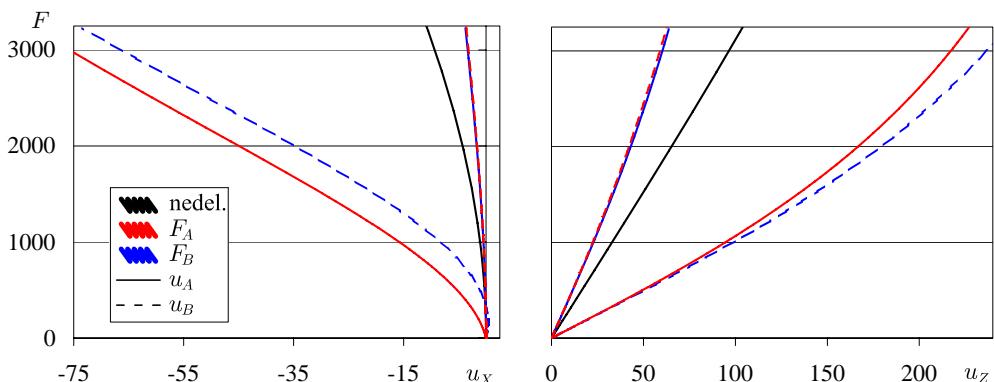
3.1 Delaminirani konzolni nosilec

Obravnavamo previsni nosilec z eno delaminacijo na prostem koncu, ki razdeli previsni del na dve lameli enake višine. Lameli sta povezani z vzmetmi različnih karakteristik. Obtežbo predstavlja točkovna sila F_Z v pozitivni smeri globalne osi Z , na prostem koncu nosilca. Obravnavamo dva obtežna primera glede na prijemališče sile: F_A sila deluje v težišču prereza zgornje lamele in F_B sila deluje v težišču spodnje lamele. Materialne in geometrijske parametre prikazuje slika 2. Konstrukcijo modeliramo z 10 elementi, od tega dva sestavljata nedelaminiran del nosilca, po 4 elemente pa smo uporabili za modeliranje posamezne lamele. Lameli povezujemo s 4 nelinearnimi vzmetmi. Uporabili smo natančne pettočkovne elemente E_5 . Spremljamo

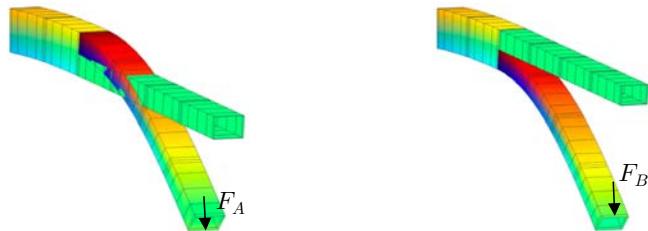


Slika 2: Skica delaminirane konzole in vhodni podatki.

pomike referenčnih točk A in B (slika 2) na prostem koncu konzole. Obnašanje delaminirane konzole pa primerjamo tudi z rezultati za nedelaminirano konzolo. Najprej si oglejmo delaminirano konzolo brez vzmeti ($k_i = 0$). Na sliki 3 prikazujemo obtežno-deformacijsko pot vozlišč na prostem koncu konzole (točki A in B) za oba obtežna primera (F_A in F_B) skupaj z rezultati za nedelaminirano konzolo. Modri krivulji označujeta obtežni primer s silo na spodnji, rdeči pa s silo na zgornji lameli. Neprekrajena črta označuje pomike zgornje, črtkana pa pomike spodnje točke. Rezultati za delaminirano konzolo se razlikujejo od nedelaminiranega primera. Nedelaminirana konzola je po pričakovanju bolj tuga. Pomiki neobremenjenega vozlišča so manjši od pomikov obremenjenega vozlišča. Če obremenimo zgornjo lamelo, pride do prekrivanja lamel (slika 4, levo). Taki rezultati se seveda nerealni. Razlog za to je v neodvisnosti stika med zgor-



Slika 3: Obtežno deformacijska pot delaminirane konzole. Prosti lameli.



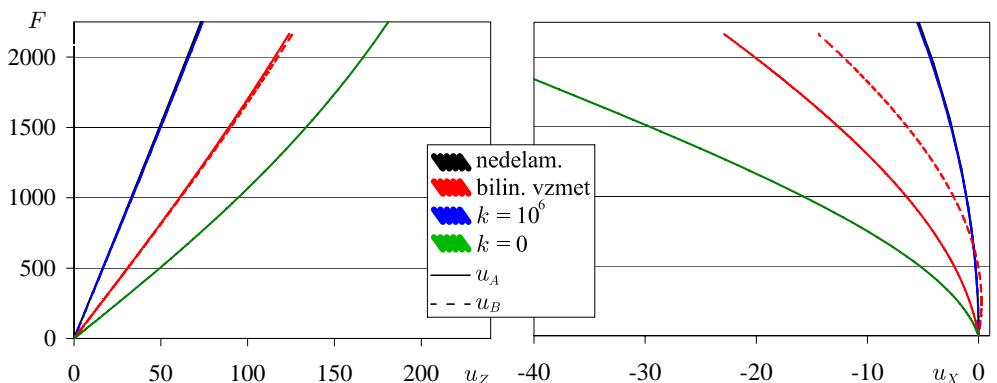
Slika 4: Skica deformirane delaminirane konzole. Prosti lameli.

njo in spodnjo lamelo, kar predstavlja izbrane ničelne togosti vzmeti. Prekrivanje preprečimo z ustreznim izbirom togosti vzmeti.

Na sliki 5 prikazujemo rezultate za različne tipove vzmeti. Uporabimo dve novi tipi togosti vzmeti. Prvo predstavlja tip vzmeti, ki deluje zgolj v smeri lokalne osi \$z\$ (\$k_1 = k_2 = 0\$). V natezni smeri je povsem podajna, v tlačni pa je zelo toga:

$$k_3 = \begin{cases} 0 & \Delta u_6 \geq 0 \\ 10^6 & \Delta u_6 < 0 \end{cases}. \quad (11)$$

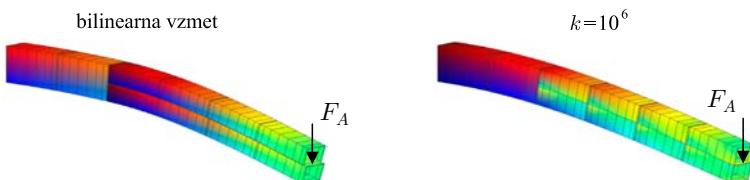
Na sliki 5 so rezultati za tak tip vzmeti označeni rdeče. Drugi tip predstavlja linearne zelo toge vzmeti: \$k_1 = k_2 = k_3 = 10^6\$. Na sliki 5 so rezultati za take vzmeti prikazani modro. Obravnavamo torej zelo togo povezani lameli, lameli s preprečenim prekrivanjem, za primerjavo pa še prosti lameli in nedelaminirani nosilec. V vseh primerih prikazujemo pomike obeh referenčnih točk, omejimo pa se na obtežbo na zgornji lameli, saj smo le v tem primeru opazili pojav prekrivanja lamel.



Slika 5: Obtežno deformacijska pot delaminirane konzole. Različne togosti vzmeti.

Zelo toga povezava med lamelama daje skoraj povsem enake rezultate kot nedelaminirani no-

silec. Pomiki spodnje in zgornje lamele se ujemajo, vrednosti pomikov pa so enake kot pri nedelaminiranem nosilcu. Togo obnašanje nosilca je razvidno tudi iz oblike deformiranega nosilca, prikazanega na sliki 6. Prerezi lamel ohranijo začetno relativno lego in se ne zamaknejo med seboj. Povezava, ki preprečuje prekrivanje lamel, sicer pa sta lameli prosti (rdeče krivulje), daje večje pomike, kot pri nedelaminiranem nosilcu. Seveda pa je togost takega nosilca večja od togosti nosilca v nerealnem modelu, kjer se lameli lahko prekrijeta (zelen graf). Pomiki delaminirane konzole so pri enaki obtežbi skoraj dvakrat večji od pomikov nedelaminirane konzole. Manjša togost je posledica prostega pomika lamel v smeri svoje osi. To opazimo tudi iz slike deformirane lege (slika 6), kjer je viden zamik lamel na prostem koncu.

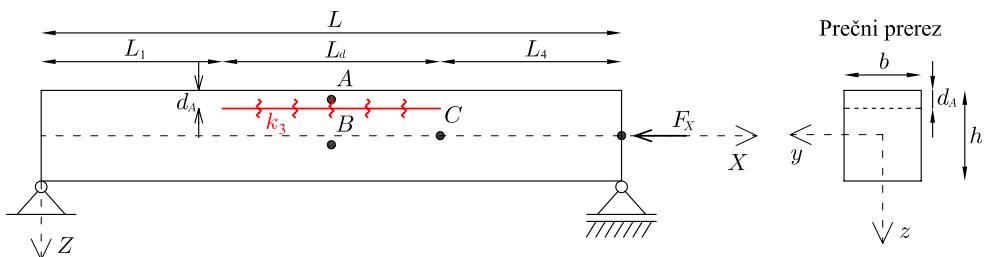


Slika 6: Skica delaminirane konzole. Vzmeti različnih togosti.

3.2 Postkritično obnašanje prostoležečega delaminiranega stebra

Z numerično metodo izračunamo postkritično obnašanje delaminiranih nosilcev, povzetih po Sheinman in Soffer [2]. Geometrija nosilca je predstavljena na sliki 7. Nosilci so delaminirani z eno delaminacijo in so prostoležeče podprtji. Obtežbo predstavlja točkovna tlačna sila v smeri osi elementa. Geometrijski in materialni podatki so: dolžina nosilca $L = 4.0$ m, širina prereza $b = 0.04$ m, višina nosilca $h = 0.08$ m, debelina zgornje lamele je $d_A = 0.01$ m, elastični modul $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ N/m² in Poissonov količnik $\nu = 0.3$. Relativna dolžina delaminacije je $l_d = L_d/L = 0.375$. Po dolžini je delaminacija postavljena simetrično ($L_1 = L_4$).

Opazovali smo pomike referenčnih točk na nosilcu, označenih z A, B in C (slika 7). Točka C

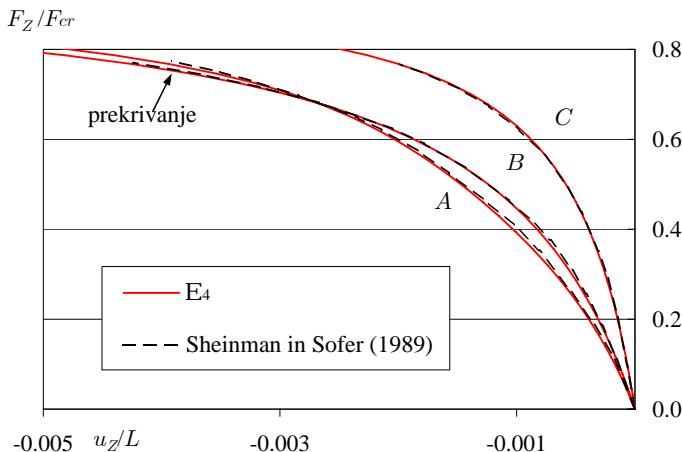


Slika 7: Delaminirani nosilec z vzmetmi med lamelama.

predstavlja težišče prereza na stiku med lamelama in desnim koncem nosilca. Točki A in B ležita v težiščih prečnih prerezov obeh lamel na sredini razpona. Sheinman in Soffer [2] sta postkritično analizo opravila z upoštevanjem začetne nepopolnosti, ki jo modelirata z začetno ukrivljenostjo nosilca oblike

$$u_Z(x) = -0.0625h \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad (12)$$

Začetno nepopolnost povzamemo tudi v našem numeričnem modelu, kjer smo uporabili skupno 22 elementov s štirimi notranjimi točkami. Na sliki 8 predstavljamo rezultate vertikalnih pomikov karakterističnih točk v odvisnosti od relativnega obtežnega faktorja.



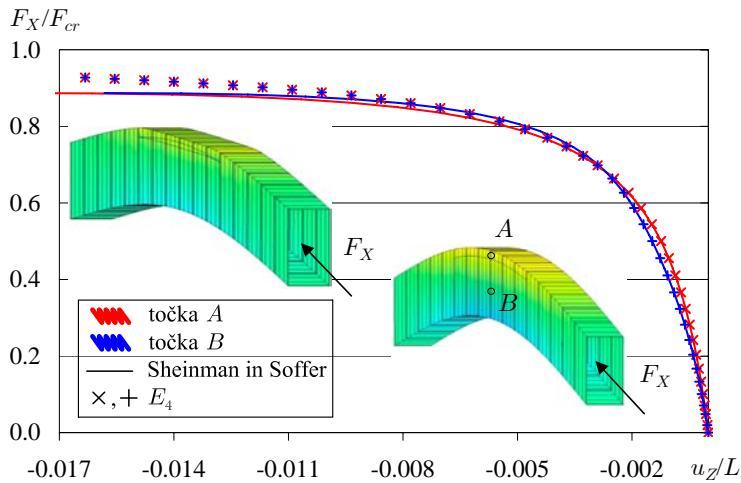
Slika 8: Obtežno deformacijska pot referenčnih točk nosilca.

Iz slike lahko razberemo dobro ujemanje dobljenih pomikov, izračunanih z našimi elementi tipa E_8 , in pomiki, ki jih podajata Sheinman in Soffer [2]. Na tem mestu opozorimo, da so rezultati za pomike točk A in B nerealni, saj pride do prekrivanja lamel. Zaradi primerjave s Sheinman in Soffer [2] smo tudi v našem modelu uporabili lameli brez medsebojnih vezi.

V nadaljevanju prekrivanje lamel preprečimo z bilinearnimi vzmetmi. Med obe lameli ekvidistantno postavimo pet vzmeti, ki imajo neničelno togost le v smeri lokalne osi z . Tretjo diagonalno komponento matrike togostnih konstant k_3 postavimo na nič za pozitivne pomike, za negativne pa vzamemo tako veliko togost, kot še dopušča numerični izračun

$$k_3 = \begin{cases} 0 & \Delta u_6 \geq 0 \\ 10^8 & \Delta u_6 < 0 \end{cases}. \quad (13)$$

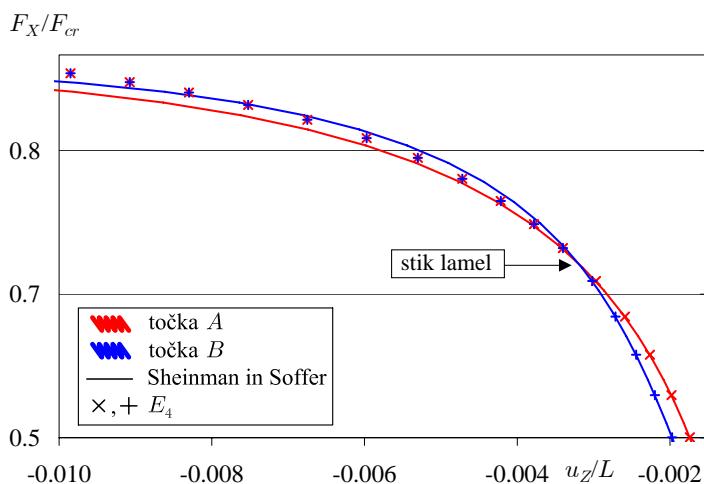
Shema delaminiranega nosilca z vzmetmi med lamelami je prikazana na sliki 7. Omejimo se na primer začetne nepopolnosti $w(x) = -0.0625h \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$, ko je pri prostih lamelah prišlo do prekrivanja. Nosilec modeliramo z 22 elementi tipa E_4 , po 5 elementov sestavlja začetni in končni nedelaminiran del nosilca, dva nabora po 6 elementov pa sestavlja zgornjo in spodnjo



Slika 9: Obtežno deformacijska pot prostoležeče podprtega nosilca z in brez upoštevanja kontakta.

lamelo na sredini nosilca. Elementi za lamele so enako dolgi, robne točke teh elementov, razen tistih ob obeh koncih delaminacije, pa povežemo z vzmetmi.

Na sliki 9 prikazujemo obtežno deformacijski poti referenčnih točk A in B. Neprekinjena črta označuje rezultate, povzete po Sheinmann in Soffer [2], medtem ko točke označujejo rezultate modela z vzmetmi.



Slika 10: Del obtežno deformacijske poti prostoležečega nosilca z in brez upoštevanja kontakta.

Obtežno deformacijski krivulji se po pričakovanjih popolnoma ujemata v prvem delu, ko se lameli medsebojno razmikata $u_{Z,A} > u_{Z,B}$. Pri pomikih okrog $u_{Z,A} \approx u_{Z,B} \approx -0.00265$ pa se lameli dotakneta. Če lameli modeliramo neodvisno, sledi prekrivanje lamel. Če pa stik med lamelama ustrezno modeliramo, do prekrivanja ne pride. Lameli se stakneta in pomikata skupaj. Tako so pomiki točke A in B enaki od stika lamel dalje. Taka konstrukcija ima tudi večjo togost od nepovezane, saj sta krivulji v zmetri po prekrivanju ($u_Z < -0.00265$) višje od krivulje za nepovezano konstrukcijo. Poleg grafov, na sliki 9 prikazujemo tudi deformirani obliki konstrukcij, ko je pomik referenčne točke enak $u_Z/L \approx 0.01$. Vidno je prekrivanje lamel v primeru neupoštevanja kontakta in pravilno deformiranje konstrukcije v primeru pravilnega modeliranja vez med lamelama.

Na sliki 10 prikazujemo izsek iz obtežno deformacijske poti, v območju, kjer se lameli dotakneta. Referenčni točki A in B se po stiku ne ločita več.

4 Zaključki

Prispevek predstavlja analizo delaminiranih nosilcev z upoštevanjem nelinearnih pogojev na stiku, ki so modelirani s prostorskimi vzmetmi. Bistveni ugotovitve pa so:

- (i) S prostorskimi vzmetmi lahko ustrezno modeliramo preprečitev prekrivanja lamel pri delaminiranih nosilcih.
- (ii) Naš model kontakta s prostorskimi vzmetmi omogoča ustrezno upoštevanje velikih pomikov in zasukov nosilcev.
- (iii) Nelinearne prostorske vzmeti so primerne tudi za modeliranje nelinearnega stika med lamelami.

Literatura

- [1] Y. T. Feng, D. Perić, D. Rj. J. Owen, *Determination of Travel Directions in Path-Following Methods*, Math. Comput. Modelling 21, 43–59, 1995.
- [2] I. Sheinman, M. Soffer, *Post-buckling analysis of composite delaminated beams*. Int. J. Solids Struct. 27, 639–646, 1989.
- [3] D. Zupan, *Rotacijsko invariantne deformacijske količine v geometrijsko točni teoriji prostorskih nosilcev*, Doktorska disertacija, 2003.
- [4] D. Zupan, M. Saje, *Finite element formulation of geometrically exact three-dimensional beam theories based on interpolation of strain measures*, CMAME 193, 5209–5248, 2003.



Primerjava med Reissnerjevo, Reddyjevo in Cheng-Wang-Shijevo teorijo zmerno debelih elastičnih plošč

Milan. Batista¹

Comportment between Reissner, Reddy and Cheng-Wang-Shi Theory of Moderately Thick Elastic Plates

Povzetek. V prispevku so na nov način izpeljane osnovne enačbe treh teorij zmerno debelih plošč. Primerjava med njimi je podana na primeru torzije pravokotne plošče in upogibu prosto podprte kvadratne plošče.

Abstract. In the article a new derivation of basic equations of three theories of moderately thick elastic plates are present. The comportment between theories is conducted on the two cases: torsion of a rectangular plate and bending of simply supported square plate.

1 Uvod

Namen prispevka je na kratko predstaviti tri teorije zmerno debelih plošč. Pri tem je izpeljava osnovnih enačb posameznih teorij in njihova transformacija nekoliko drugačna kot v originalnih delih avtorjev. Tako sta Reissner ([3]) in Reddy ([2]) za izpeljavo osnovnih enačb uporabila variacijsko načelo najmanjšega deformacijskega dela medtem, ko je v tem prispevku uporabljen metoda uravnoveženih ostankov. Prav tako je Reddy pri uporabi svojih enačb ohranil kinematične spremenljivke in zadržal višje napetostne momente ([5]), v tem delu pa so njegove enačbe izpeljane v obliko, ki vsebujejo le prečni premik in prečne strižne sile. Posebno je potrebno poudariti, da je Chenga ([1]) podal eksaktne rešitev sistema tridimenzionalnih enačb elastostatike, medtem ko je teorija, ki sta jo postavila Wang in Shi ([6]) teorija izpeljana iz eksaktne rešitve. V tem prispevku je tretja obravnavana teorija poimenovana po teh treh avtorjih iz razloga, ker so izpeljane enačbe približek enačbam, ki so jih dobili navedeni avtorji.

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za pomorstvo in promet

2 Osnovne enačbe

Obravnavamo ravnotežje plošče debeline $2h$, zanemarljive mase, izdelano iz homogenega in izotropnega elastičnega materiala, ki ga popisujeta elastični modul E in Poissonovo razmerje ν . V Kartizijevem pravokotnem koordinatnem sistemu s koordinatami (x, y, z) je koordinata z pravokotna na ravnino plošče, koordinati x in y pa se nahajata na osrednji ravnini plošče, tako, da sta zunanjí ploskvi plošče nahajata na $z = \pm h$. Napetostno-deformacijsko stanje plošče določajo ravninske napetosti $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, prečne strižne napetosti τ_{xz}, τ_{yz} , prečna normalna napetost σ_z , ravninska pomika u in v ter prečni pomik w . Devet spremenljivk je povezanih z devetimi enačbami. To so ravnotežne enačbe

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (x \rightleftharpoons y) \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

in konstitutivne enačbe, ki jih zapišemo v pol inverzni obliki

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (x, u \rightleftharpoons y, v) \quad (2)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \quad (x, u \rightleftharpoons y, v) \quad \tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (3)$$

Pri tem je $G = E/2(1+\nu)$ strižni modul, znak $x \rightleftharpoons y$ desno ob izrazu pa pomeni, da enačbo, ki ustreza drugi koordinati dobimo z zamenjavo x in y . Čelni ploskvi plošče naj bosta obremenjeni z vertikalno obremenitvijo $p = p(x, y)$ tako, da velja

$$\tau_{xz}(x, y, \pm h) = \tau_{yz}(x, y, \pm h) = 0 \quad \sigma_z(x, y, \pm h) = \pm \frac{P}{2} \quad (4)$$

Z navedenimi robnimi pogoji je plošča obremenjena le na upogib. To pomeni, da so w, τ_{xz}, τ_{yz} simetrične, $u, v, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ in σ_z pa so asimetrične funkcije koordinate z . Na osrednji ravnini plošče torej velja .

$$(u, v, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_z)(x, y, 0) = 0 \quad (5)$$

Porazdelitev napetosti po debelini plošče povzroča upogibna momenta M_x, M_y , torzijski moment M_{xy} in prečni strižni sile Q_{xz}, Q_{yz} . Ti momenti in sili so definirani kot

$$(M_x, M_y, M_{xy}) \equiv \int_{-h}^h (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz \quad (Q_x, Q_y) \equiv \int_{-h}^h (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (6)$$

Z upoštevanjem navedenih definicij in robnih pogojev (4) dobimo z integracijo napetostnih ravnotežnih enačbe (1) ravnotežne enačbe plošče

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (x \rightleftharpoons y) \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -p \quad (7)$$

Višji momenti napetosti so definirani z izrazi

$$(P_x, P_y, P_{xy}) \equiv \int_{-h}^h (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z^3 dz \quad (R_x, R_y) \equiv \int_{-h}^h (\tau_{xz}, \tau_{yz}) z^2 dz \quad M_z \equiv \int_{-h}^h \sigma_z z dz \quad (8)$$

Iz ravnotežnih enačb (1) in navedenih definicij sledi z integracijo in upoštevanjem robnih pogojev (4)

$$R_x = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} \right) \quad (x \rightleftharpoons y) \quad \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} - 2M_z = -h^2 p \quad (9)$$

Osnovna naloga vsake teorije plošč je, da poskuša z uvedbo določenih predpostavk o porazdelitvi napetosti in/ali premikov po debelini plošče, navedene elastostatične enačbe reducirati v dvodimenzionalno obliko in na ta način približno rešiti tridimenzionalni problem. Osnovna poenostavitev, ki jo bomo uporabili v nadaljevanju je, da je prečni premik neodvisen od koordinate z^2

$$w = w_0(x, y) \quad (10)$$

S to predpostavko iz obravnave izločimo konstitutivno enačbo (2)₁.

3 Teorije zmerno debelih plošč

3.1 Reissnerjeva teorija

Izhodiščna predpostavka Reissnerjeve teorije je, da so ravninske napetosti linearno porazdeljene po prerezu plošče

$$\sigma_x = \frac{3M_x}{2h^2} \zeta \quad \sigma_y = \frac{3M_y}{2h^2} \zeta \quad \tau_{xy} = \frac{3M_{xy}}{2h^2} \zeta \quad (11)$$

Pri tem je $\zeta \equiv z/h \in [-1, 1]$. Z integracijo ravnotežnih enačb (1) in konstitutivnih enačb (2)₂ ob upoštevanju robnih pogojev (4), pogoja (5) in enačbe (7)₁ dobimo naslednje izraze za prečne napetosti in ravninske premike

$$\tau_{xz} = \frac{3Q_{xz}}{4h} (1 - \zeta^2) \quad (x \rightleftharpoons y) \quad \sigma_z = \frac{p}{4} \zeta (3 - \zeta^2) \quad (12)$$

² Ta predpostavka za primer Reissnerjeve teorije in Cheng-Wang-Shijkeve teorije ni nujna, vendar pa nekoliko poenostavi obravnavo.

$$u = -h \frac{\partial w_0}{\partial x} \zeta + \frac{Q_{xz}}{4G} \zeta (3 - \zeta^2) \quad (x, u \rightleftharpoons y, v) \quad (13)$$

Tako dobljeni izrazi za napetosti in premike ne izpolnjujejo konstitutivnih enačb (3). Ostanki teh enačb so

$$\begin{aligned} r_x &\equiv \sigma_x - \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \neq 0 \quad (x \rightleftharpoons y) \\ r_{xy} &\equiv \tau_{xy} - \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \neq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Te enačbe lahko približno izpolnimo z uporabo metode uravnoveženih ostankov, po kateri mora veljati $\int_{-h}^h r_{\alpha\beta}(x, y, z) z dz = 0$. Če izvršimo nakazano integracijo in upoštevamo (7)₂ dobimo naslednje izraze za momente

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \frac{4h^2}{5} \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{2h^2}{5} \frac{\nu}{1-\nu} p \quad (x \rightleftharpoons y) \\ M_{xy} &= -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{2h^2}{5} \left(\frac{\partial Q_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

Če te momente vstavimo v ravnotežne enačbe (7) dobimo Reissnerjeve enačbe

$$\begin{aligned} Q_{xz} - \frac{2h^2}{5} \Delta Q_{xz} &= -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w_0 - \frac{2h^2}{5(1-\nu)} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (x \rightleftharpoons y) \\ D \Delta^2 w_0 &= p - \frac{2h^2}{5} \frac{2-\nu}{1-\nu} \Delta p \end{aligned}$$

(16)

pri čemer je $\Delta = \partial^2(\)/\partial x^2 + \partial^2(\)/\partial y^2$ Laplaceov operator. Enačbe navedene teorije torej zadoščajo ravnotežnim enačbam tako za napetosti (1) kot za ploščo (7), zadoščajo konstitutivnim enačbam (3), ne zadoščajo pa konstitutivni enačbi (2)₂. Da zadostimo tem enačbam vanje vstavimo premike (13). Na ta način dobimo naslednje izraze za napetosti, ki jih je na drugačen način izpeljal Reissner ([4])

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{3M_x}{2h^2} \zeta + \frac{1}{10} \frac{\partial Q_x}{\partial x} \zeta (3 - 5\zeta^2) - \frac{\nu p}{20(1-\nu)} \zeta (3 - 5\zeta^2) \quad (x \rightleftharpoons y) \\ \tau_{xy} &= \frac{3M_{xy}}{2h^2} \zeta + \frac{1}{20} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} \right) \zeta (3 - 5\zeta^2) \end{aligned} \quad (17)$$

Z integracijo ravnotežnih enačb (1) pa dobimo nove izraze za prečne napetosti

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \frac{5Q_{xz}}{32h} (1 - \zeta^2)(5 - \zeta^2) - \frac{1}{32h(1+\nu)} \frac{\partial M}{\partial x} (1 - \zeta^2)(1 - 5\zeta^2) \\ &\quad - \frac{h}{40(1-\nu)^2} \frac{\partial p}{\partial x} (1 - \zeta^2)(1 - 5\zeta^2) \quad (x \rightleftharpoons y) \\ \sigma_z &= \frac{p}{4} \zeta (3 - \zeta^2) + \frac{h^2}{80} \frac{2-\nu}{1-\nu} \Delta p \zeta (1 - \zeta^2)^2\end{aligned}\tag{18}$$

pri čemer je $M \equiv M_x + M_y$. Pri popravljeni teoriji niso izpolnjene konstitutivne enačbe (2)₂.

3.2 Reddyjeva teorija

Reddyjeva teorija plošč temelji na predpostavkah, da so ravninski premiki kubično porazdeljeni po prerezu plošče ter da v plošči ni prečnih normalnih napetosti

$$u = h\phi_x \zeta - \frac{h}{3} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \zeta^3 \quad (x, u \rightleftharpoons y, v) \quad \sigma_z = 0\tag{19}$$

pri čemer je $\phi_x = \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, 0)$. Na osnovi navedenih predpostavk dobimo iz konstitutivnih enačb (2)₂ in (3) naslednje izraze za napetosti

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{hE}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \zeta^3 + \frac{hE}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \zeta (3 - \zeta^2) \quad (x \rightleftharpoons y) \\ \tau_{xy} &= -\frac{2hG}{3} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \zeta^3 + \frac{hG}{3} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \zeta (3 - \zeta^2) \\ \tau_{xz} &= G \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) (1 - \zeta^2) \quad (x \rightleftharpoons y)\end{aligned}\tag{20}$$

Po definiciji (6) in (8) so momenti, prečni sili in momenti drugega reda, ki jih povzročajo navedene napetosti naslednji

$$\begin{aligned}M_x &= -\frac{D}{5} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \frac{4D}{5} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \quad (x \rightleftharpoons y) \\ M_{xy} &= -(1-\nu) \frac{D}{5} \left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - 2 \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \right] \quad Q_{xz} = \frac{4hG}{3} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (x \rightleftharpoons y)\end{aligned}\tag{21}$$

$$\begin{aligned}M_z &= 0 \quad P_x = -\frac{h^2 D}{7} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \frac{16h^2 D}{35} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \quad (x \rightleftharpoons y) \\ P_{xy} &= \frac{4h^5 G}{21} \left[-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{8}{5} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \right] \quad R_{xz} = \frac{4h^3 G}{15} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (x \rightleftharpoons y)\end{aligned}\tag{22}$$

Reddyjevo teorijo tvori deset konstitutivnih enačb v katerih nastopa trinajst neznank: $w_0, \phi_x, \phi_y, M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y, P_x, P_y, P_{xy}, R_x, R_y$. Skupaj z ravnotežnimi enačbami (7) ter enačbami (9) je sistem predoločen, zato ni mogoče izpolniti napetostnih ravnotežnih pogojev niti vseh pogojev ravnotežja plošč. Ravninske ravnotežne pogoje nadomestimo s pogojem

$$\int_{-h}^h \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) z \left(1 - \frac{z^2}{3h^2} \right) dz = 0 \quad (x \Leftrightarrow y) \quad (23)$$

prečne ravnotežne pogoje pa z izločitvijo strižnih sil iz ravnotežnih pogojev (7). Preden uporabimo pogoj (23) iz konstitutivnih enačb (21) in (22) izpeljemo naslednje izraze za ravninske napetosti

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{15M_x}{8h^2} \zeta (5 - 7\zeta^2) - \frac{35P_x}{8h^4} \zeta (3 - 5\zeta^2) \quad (x \Leftrightarrow y) \\ \tau_{xy} &= \frac{15M_{xy}}{8h^2} \zeta (5 - 7\zeta^2) - \frac{35P_{xy}}{8h^4} \zeta (3 - 5\zeta^2) \end{aligned} \quad (24)$$

Z upoštevanjem navedenih izrazov v pogoju (23) in izločitvijo prečnih sil v ravnotežnih enačbah (7) dobimo Reddyjeve pogoje ravnotežja plošče³

$$\begin{aligned} Q_x - \frac{1}{h^2} R_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \frac{1}{3h^2} \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} \right) \quad (x \Leftrightarrow y) \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} &= -p \end{aligned} \quad (25)$$

Enačbe teorije sedaj izpeljemo na naslednji način. Iz (21)₃ in (22)₃ izrazimo

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{3}{4hG} Q_{xz} \quad R_{xz} = \frac{h^2}{5} Q_{xz} \quad (x \Leftrightarrow y) \quad (26)$$

Z uporabo navedenih izrazov se izrazi za momente (21)_{1,2} preoblikujejo v

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \frac{2h^2}{5} \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{4h^2 \nu}{5(1-\nu)} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) \quad (x \Leftrightarrow y) \\ M_{xy} &= -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{2h^2}{5} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

izrazi za momente drugege reda (22)_{1,2} pa v

³ Kot je bilo omenjeno v uvodu je Reddy svoje enačbe izpeljal iz variacijskega načela najmanjšega dela

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{3h^2}{5} M_x - \frac{4h^4}{175} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{4h^4 \nu}{175(1-\nu)} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) \quad (x \rightleftharpoons y) \\ P_{xy} &= \frac{3h^2}{5} M_{xy} + \frac{2h^4}{175} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

Če (26)₁, (27) in (28) vstavimo v (24) dobimo napetosti v obliki

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{3M_x}{2h^2} \zeta + \frac{1}{10} \frac{\partial Q_x}{\partial x} \zeta (3 - 5\zeta^2) - \frac{1}{10(1-\nu)} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) \zeta (3 - 5\zeta^2) \quad (x \rightleftharpoons y) \\ \tau_{xy} &= \frac{3M_{xy}}{2h^2} \zeta + \frac{1}{20} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} \right) \zeta (3 - 5\zeta^2) \quad \tau_{xz} = \frac{3}{4h} Q_{xz} (1 - \zeta^2) \quad (x \rightleftharpoons y) \end{aligned} \quad (29)$$

premiki (19) pa se s pomočjo (26)₁ izražajo na enak način kot v Reissnerjevi teoriji

$$u = -h \frac{\partial w_0}{\partial x} \zeta + \frac{Q_{xz}}{4G} \zeta (3 - \zeta^2) \quad (x, u \rightleftharpoons y, v) \quad w = w_0(x, y) \quad (30)$$

Če sedaj momente (27) vstavimo v Reddyjeve ravnotežne pogoje (25) dobimo osnovne enačbe teorije

$$\begin{aligned} Q_x - \frac{17h^2}{42} \Delta Q_x &= -D \frac{\partial \Delta w_0}{\partial x} + \frac{17h^2(1+\nu)}{42(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) \quad (x \rightleftharpoons y) \\ D \Delta^2 w_0 &= p - \frac{4h^2}{5(1-\nu)} \Delta \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

Po Reddyevi teoriji so torej izpolnjene konstitutivne enačbe (2)_{2,in} (3), niso pa izpolnjene ravnotežne enačbe niti za napetosti (1) niti za ploščo (7). Pri tem je potrebno poudariti, da so enačbe plošče (31) kot tudi izrazi za napetosti (29) podobni Reissnerjevim enačbam z razliko, da namesto obremenitve p v njih nastopa izraz $\partial Q_x / \partial x + \partial Q_y / \partial y$. Za razliko od Reissnerjevih enačb (16) so enačbe (31) medsebojno povezane.

3.3 Cheng-Wang-Shijeva teorija

Kot osnovne predpostavke te teorije izberemo kosinusno porazdelitev strižnih napetosti po prerezu plošče

$$\tau_{xz} = \frac{\pi Q_{xz}}{4h} \cos \frac{\pi \zeta}{2} \quad (x \rightleftharpoons y) \quad (32)$$

Z integracijo ravnotežne enačbe (1)₂ in konstitutivnih enačb (2)₂ dobimo

$$\sigma_z = \frac{p}{2} \sin \frac{\pi \zeta}{2} \quad u = -h \frac{\partial w_0}{\partial x} \zeta + \frac{Q_{xz}}{2G} \sin \frac{\pi \zeta}{2} \quad (x, u \rightleftharpoons y, v) \quad (33)$$

komponente ravninskih napetosti pa dobimo iz konstitutivnih enačb (3)

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{hE}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \zeta + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} \sin \frac{\pi \zeta}{2} - \frac{\nu}{2(1-\nu)} p \sin \frac{\pi \zeta}{2} \quad (x \rightleftharpoons y) \\ \tau_{xy} &= -\frac{hE}{1+\nu} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Q_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial x} \right) \sin \frac{\pi \zeta}{2}\end{aligned}\quad (34)$$

Po definiciji (6)₁ so momenti, ki ustrezajo zgornjim napetostim

$$\begin{aligned}M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \frac{8h^2}{\pi^2} \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{4h^2 \nu}{\pi^2 (1-\nu)} p \quad (x \rightleftharpoons y) \\ M_{xy} &= -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{4h^2}{\pi^2} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (35)$$

Z uporabo navedenih izrazov za momente lahko zapišemo napetosti (34) tudi v obliki

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{3M_x}{2h^2} \zeta + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} \left(\sin \frac{\pi \zeta}{2} - \frac{12}{\pi^2} \zeta \right) - \frac{\nu}{2(1-\nu)} p \left(\sin \frac{\pi \zeta}{2} - \frac{12}{\pi^2} \zeta \right) \quad (x \rightleftharpoons y) \\ \tau_{xy} &= \frac{3M_{xy}}{2h^2} \zeta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Q_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial x} \right) \left(\sin \frac{\pi \zeta}{2} - \frac{12}{\pi^2} \zeta \right)\end{aligned}\quad (36)$$

Z vstavljanjem momentov (35)v ravnotežne enačbe plošče (7) dobimo osnovne enačbe teorije

$$\begin{aligned}Q_{xz} - \frac{4h^2}{\pi^2} \Delta Q_{xz} &= -D \frac{\partial \Delta w_0}{\partial x} - \frac{4h^2}{\pi^2 (1-\nu)} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (x \rightleftharpoons y) \\ D \Delta^2 w_0 &= p - \frac{4h^2}{\pi^2} \frac{2-\nu}{1-\nu} \Delta p\end{aligned}\quad (37)$$

Po navedeni teoriji niso izpolnjene ravnotežne enačbe za ravninske komponente napetosti (1)₁. Tudi enačbe te teorije so podobne enačbam Reisnerjeve teorije.

4 Računska primera

4.1 Torzija pravokotne plošče

Kot prvi primer obravnavamo ploščo dolžine $2L$ (vzeto v smeri x) in širine a . Ploskve $x = \pm L$, $y = \pm a/2$, $z = \pm h$ so neobremenjeni, na $y = \pm a/2$ pa je podana rotacija $w = \pm \theta L y$. Rešitev navedenega problema dobimo z izbiro

$$w = \vartheta xy \quad Q_x = Q_x(y) \quad Q_y = 0 \quad (38)$$

V Tabeli 1, 2 in 3 so podani naslednji faktorji koncentracije napetosti

$$T = \int_{-b/2}^{b/2} (M_{xy} - yQ_{xz}) dy = -k_T G\theta (2h)^3 b \quad \tau_{xy}(0, h) = k_{xy} hG\theta \quad \tau_{xz}(b/2, 0) = k_{xz} hG\theta \quad (39)$$

Iz tabel je razvidno, da dobimo najmanjšo relativno napako za k_T z uporabo Reissnerjevega modela, najmanjšo napako za k_{xz} pa daje Reddyev model.

Tabela 1: Faktor koncentracije napetosti k_T .

2h/a	10	2	1	0.5	0.2	0
Točna rešitev	0.0031233	0.057170	0.140577	0.228682	0.291317	1/3
Reissner	0.0027503	0.055588	0.139638	0.228301	0.291170	1/3
Reddy	0.0027182	0.055063	0.138799	0.227692	0.290919	1/3
Cheng-Wang-Shi	0.0027148	0.055056	0.138708	0.227626	0.290892	1/3
Relativna napaka %						
Reissner	11.94	2.77	0.67	0.17	0.05	0
Reddy	12.97	3.69	1.26	0.43	0.14	0
Cheng-Wang-Shi	13.08	3.79	1.33	0.46	0.15	0

Tabela 2: Faktor koncentracije napetosti k_{xy} .

2h/a	10	2	1	0.5	0.2	0
Točna rešitev	0.14849	0.73943	1.35063	1.86012	1.99874	2
Reissner	0.02474	0.49524	1.21046	1.83099	1.99853	2
Reissner (1)	0.35395	0.74604	1.34205	1.85915	1.99877	2
Reddy	0.34984	0.73923	1.33483	1.85617	1.99871	2
Cheng-Wang-Shi	0.37515	0.75817	1.34443	1.85810	1.99872	2
Relativna napaka %						
Reissner	83.34	33.02	10.38	1.57	0.01	0
Reissner (1)	138.37	0.89	0.64	0.05	0.00	0
Reddy	135.60	0.03	1.17	0.21	0.00	0
Cheng-Wang-Shi	152.64	2.53	0.46	0.11	0.00	0

Tabela 3: Faktor koncentracije napetosti k_{xz} .

2h/a	10	2	1	0.5	0.2	0
Točna rešitev	0.200000	0.930061	1.350630	1.478865	1.484908	1.484907
Reissner	0.247937	1.041546	1.452718	1.575483	1.581138	1.581139
Reissner (1)	0.258268	1.084944	1.513248	1.641128	1.647019	1.647020
Reddy	0.245044	1.031238	1.441843	1.565976	1.571810	1.571810
Cheng-Wang-Shi	0.256281	1.078738	1.508655	1.638802	1.644934	1.644934
Relativna napaka %						
Reissner	23.97	11.99	7.56	6.53	6.48	6.48
Reissner (1)	29.13	16.65	12.04	10.97	10.92	10.92
Reddy	22.52	10.88	6.75	5.89	5.85	5.85
Cheng-Wang-Shi	28.14	15.99	11.70	10.81	10.78	10.78

4.2 Upogib prostot podprtih kvadratnih plošč

Kot drugi primer obravnavamo kvadratno ploščo z dolžino stranice a obremenjeno z obremenitvijo.

$$p = p_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2a} \quad (40)$$

Tabela 4: Osni premik središča plošče $w_0(0,0)/(p_0 a^4/D) \times 10^3$ za $\nu = 0.3$.

2h/b	0.01	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
Natan-na	2.5678	2.5986	2.6946	2.8536	3.0742	3.3544	3.6915
Reissner	2.5677	2.5973	2.6895	2.8433	3.0586	3.3355	3.6738
Reddy	2.5679	2.6027	2.7111	2.8917	3.1439	3.4674	3.8614
Cheng-Wang-Shi	2.5677	2.5977	2.6912	2.8470	3.0651	3.3456	3.6884
relativna napaka %							
Reissner	0.00	0.05	0.19	0.36	0.51	0.56	0.48
Reddy	0.00	-0.16	-0.61	-1.34	-2.27	-3.37	-4.60
Cheng-Wang-Shi	0.00	0.03	0.13	0.23	0.30	0.26	0.08

Rešitev enačb (16),(31) in (37) dobimo z nastavkom

$$w_0 = A \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2a} \quad Q_{xz} = B \sin \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2a} \quad Q_{yz} = C \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{2a} \quad (41)$$

pri čemer so A , B in C konstante, ki ji določimo iz teh enačb. Rezultati izračuna premika središča plošče in napetosti na čelnih ploskvi so podani v Tabeli 4 in Tabeli 5. Iz tabel je razvidno, da dobimo najmanšo relativno napako tako za izračun premika kot za izračun napetosti z uporabo Cheng-Wang-Shijevega modela plošče.

Tabela 5: Napetost $\sigma_x(0,0,h)/p_0$ za $\nu = 0.3$.

2h/a	0.01	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
Točna rešitev	1976.0	79.3121	20.0439	9.0753	5.2442	3.4794	2.5293
Reissner	1975.9	79.1205	19.8476	8.8712	5.0294	3.2512	2.2853
Reissner (1)	1976.0	79.2634	19.9905	9.0140	5.1723	3.3941	2.4281
Reddy	1975.9	79.2162	19.9432	8.9666	5.1246	3.3462	2.3799
Cheng-Wang-Shi	1976.0	79.2759	20.0030	9.0265	5.1848	3.4066	2.4407
Relativna napaka %							
Reissner	0.01	0.24	0.98	2.25	4.10	6.56	9.65
Reissner (1)	0.00	0.06	0.27	0.68	1.37	2.45	4.00
Reddy	0.01	0.12	0.50	1.20	2.28	3.83	5.91
Cheng-Wang-Shi	0.00	0.05	0.20	0.54	1.13	2.09	3.50

Literatura

- [1] S.Cheng. Elasticity Theory of Plates and a Refined Theory. Trans. ASME 46, 644-649, 1979.
- [2] J.N. Reddy, C.M. Wang. Deflection relationships between classical and third-order plate theories. Acta Mechanica 130 199 - 208, 1998.
- [3] E. Reissner . On the theory of bending of elastic plates. J Math Phys 23, 184–191, 1944
- [4] E. Reissner. On Transverse Bending of Plates, Including the Effect of Transverse Shear Deformation , International Journal of Solids and Structures, Volume 11, Issue 5, May 1975, Pages 569-573
- [5] C.M.Wang, J.N.Reddy, K.H.Lee. Shear Deformable Beams and Plates. Elsevier, 2000
- [6] W.Wang, M.X.Shi. Thick plate theory based on general solutions of elasticity. Acta Mechanica 123, 27-36, 1997



Primerjava valčne transformacije in metode mnogokratnih polov za reševanje integralnih enačb Poissonovega tipa

Jure Ravnik¹, Leopold Škerget in Matjaž Hriberšek

Comparison of wavelet and fast multipole solutions of integral Poisson type equations

Povzetek. Če metodo robnih elementov uporabimo za rešitev nehomogene parcialne diferencialne enačbe moramo po diskretizaciji izračunati polno matriko območnih integralov. V prispevku primerjamo dve metodi: metodo mnogokratnih polov in valčno transformacijo, ki omogočata izdelavo razpršene aproksimacije območnih matrik. Pri metodi mnogokratnih polov uporabljam razvoj integralskega jedra po sferičnih harmonikih. Uporabljeni valčni transformacijski temelji na diskretni Haarovi transformaciji za vektorje poljubnih dolžin. Metodi smo testirali na skalarni Poissonovi enačbi in vektorski hitrostno vrtinčni enačbi kinematike. Rezultati kažejo, da metoda večkratnih polov daje natančnejše rezultate pri enaki stopnji razpršenosti območne matrike. Po drugi strani pa valčno transformacijo lahko uporabljam nespremenjeno za katerokoli matriko, medtem ko je metoda večkratnih polov odvisna od razvoja integralskega jedra v vrsto.

Abstract. The boundary element method applied on non-homogenous partial differential equations requires calculation of a fully populated matrix of domain integrals. This paper compares two techniques: the fast multipole method and the fast wavelet transform, which are used to reduce the complexity of such domain matrices. The employed fast multipole method utilizes the expansion of integral kernels into series of spherical harmonics. The wavelet transform for vectors of arbitrary length, based on Haar wavelets, is used. Both methods are tested and compared by solving the scalar Poisson equation and the velocity-vorticity vector kinematics equation. The results show that the fast multipole method yields results of higher accuracy at a given data storage size than the wavelet method. On the other hand, the wavelet transform can easily be adapted for any problem, while a different expansion is needed for each integral kernel by the fast multipole method.

1 Uvod

Poznamo veliko metod za reševanje parcialnih diferencialnih enačb. Večina jih temelji na diskretizaciji celotnega računskega območja in zapisu sistema linearnih enačb za neznane razpojene po celotnem območju. Pri metodi robnih elementov s pomočjo fundamentalne rešitve

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

enačbe in Greenovega stavka zapišemo integralsko obliko, ki povezuje samo neznanke na robu. Tako lahko diskretiziramo samo rob območja in zapišemo linearни sistem enačb samo za neznanke na robu. Metoda robnih elementov to prednost izgubi, če obravnavamo nehomogene enačbe, saj v integralski obliki ostane poleg robnih tudi območni člen. Takšne so enačbe Poissonovega tipa. Območni člen zahteva diskretizacijo območja in shranjevanje in izračun elementov polne matrike, ki ima število vrstic enako številu robnih vozlišč in število stolpcev enako številu območnih vozlišč.

Metoda *dual reciprocity* (Partridge in sod. [3]) razvije nehomogeni člen v vrsto po radialnih baznih funkcijah in se s tem izogne izračunu in shranjevanju polne matrike območnih integralov. Hackbusch in sodelavci [2] so razvili metodo, ki temelji na posebnem razredu matrik, na hierarhičnih matrikah, in omogoča aproksimacijo polnih matrik z razpršenimi.

V članku primerjamo dve metodi, ki omogočata razpršen zapis območne matrike - stiskanje z valčno transformacijo in metodo mnogokratnih polov (*fast multipole method*) FMM. Obe količino podatkov v območni matriki, ki jih moramo shraniti za izračun desne strani sistema enačb, zmanjšata iz $O(n_d \cdot n_b)$ na $O(n_d)$, kjer je n_b število vozlišč na robu in n_d število vozlišč v območju.

2 Metoda robnih elementov za Poissonovo enačbo in enačbo kinematike

Pri skalarni Poissonovi enačbi in vektorski enačbi kinematike deluje difuzijski operator na neznanu skalarno oziroma vektorsko polje. Obe enačbi vključujeta izvore na desni strani, sta nehomogeni,

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = b(\vec{r}); \quad \nabla^2 \vec{v}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \times \vec{\omega}(\vec{r}); \quad \vec{r} \in \Omega, \quad (1)$$

kjer sta neznanu skalarno polje $u(\vec{r})$ in neznanu vektorsko polje $\vec{v}(\vec{r})$ definirani na območju Ω z robom $\Gamma = \partial\Omega$. Če obravnavamo tok nestisljive tekočine, ustreza \vec{v} hitrostnemu polju in $\vec{\omega}$ vrtinčnemu polju. Enačbi lahko rešimo, ko predpišemo primerne robne pogoje, znano funkcijo ali njen odvod na robu. Integralski oblici enačb (1) sta:

$$c(\vec{\xi})u(\vec{\xi}) + \int_{\Gamma} u(\vec{r})\vec{n} \cdot \vec{\nabla} u^* d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* \vec{n} \cdot \vec{\nabla} u(\vec{r}) d\Gamma - \int_{\Omega} b(\vec{r})u^* d\Omega, \quad (2)$$

$$c(\vec{\xi})\vec{v}(\vec{\xi}) + \int_{\Gamma} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} u^* \cdot \vec{n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \vec{v} \times (\vec{n} \times \vec{\nabla}) u^* d\Gamma + \int_{\Omega} (\vec{\omega} \times \vec{\nabla} u^*) d\Omega. \quad (3)$$

kjer je $\vec{\xi}$ izvorna točka na robu, \vec{n} normala in $u^* = 1/4\pi|\vec{r} - \vec{\xi}|$ fundamentalna rešitev Laplaceove enačbe v treh dimenzijah. Območje in rob diskretiziramo z območnimi celicami $\Omega \approx \sum_{c=1}^{n_c} \Omega_c$ in robnimi elementi $\Gamma \approx \sum_{e=1}^{n_e} \Gamma_e$. Znotraj celic in elementov polja aproksimiramo z interpolacijskimi funkcijami. Uporabljamo heksaedre s 27 vozlišči in kvadratne interpolacijske funkcije Φ . Robne interpolacijske funkcije ϕ povezujejo devet zveznih vozlišč za interpolacijo funkcije. Interpolacijo normalnega odvoda po robu izvajamo z neveznimi štiritočkovnimi interpolacijskimi funkcijami ϕ . S tako diskretizacijo je za preoblikovanje enačb (2) in (3) v sistema linearnih enačb potrebno izračunati naslednje integrale:

$$h_i^{e,\vec{\xi}} = \int_{\Gamma_e} \Phi_i^e \vec{n} \cdot \vec{\nabla} u^* d\Gamma, \quad g_i^{e,\vec{\xi}} = \int_{\Gamma_e} \Phi_i^e u^* d\Gamma, \quad \beta_i^{c,\vec{\xi}} = \int_{\Omega_c} \Phi_i^c u^* d\Omega, \quad (4)$$

$$h_i^{e,\vec{\xi}} = \int_{\Gamma_e} \Phi_i^e \vec{\nabla} u^* \cdot \vec{n} d\Gamma, \quad \vec{h}_i^{e,\vec{\xi}} = \int_{\Gamma_e} \Phi_i^e (\vec{n} \times \vec{\nabla}) u^* d\Gamma, \quad \vec{B}_i^{c,\vec{\xi}} = \int_{\Omega_c} \Phi_i^c \vec{\nabla} u^* d\Omega. \quad (5)$$

V tem prispevku obravnavamo zgolj območna integrala $\beta_i^{c,\vec{\xi}}$ in $\vec{B}_i^{c,\vec{\xi}}$. Ko ju ovrednotimo za vse elemente, celice in izvorne točke, ju shranimo v matrike, ki imajo število vrstic enako številu robnih vozlišč in število stolpcev enako številu območnih vozlišč. Shranjevanje tako velike polne matrike ter čas, ki je potreben za izvajanje algebrajskih operacij z njo, omejujeta največjo gostoto mreže, ki jo lahko obravnavamo z algoritmom. Zato smo razvili dve metodi za izdelavo razpršene aproksimacije območnih matrik.

3 Valčna transformacija

Valčna transformacija je matematično orodje, ki se uporablja na različnih področjih z namenom zagotavljanja prihranka in računalniškega spomina. Na Kuhljevih dnevih so Ravnik in sod. [5] že poročali o algoritmih povezanih z metodo robnih elementov.

Naj bo $[B]$ območna matrika in W matrika valčne transformacije. Rezultat množenja W z vektorjem je vektor valčnih koeficientov, ki nastopajo pred valčki pri zapisu vektorja z valčki kot baznimi funkcijami. Naj bo $\{b\}$ vektor. Ker velja $W^T = W^{-1}$ lahko matrično vektorski produkt zapišemo takole:

$$[B]\{b\} = W^T (W[B]W^T) W\{b\}. \quad (6)$$

V matriki $[B_w] = W[B]W^T$ lahko za ceno majhne napake pri množenju postavimo na nič po absolutni vrednosti majhne člene. Matriko zapišemo v zapisu strnjениh vrstic in tako prihranimo računalniški spomin. Stopnjo stiskanja in s tem natančnost metode lahko poljubno nastavimo z izbiro meje za postavljanje elementov na nič. Valčna transformacija je popolnoma algebrajska metoda. Nespremenjeno lahko uporabimo na katerikoli matriki, vendar zahteva izračun cele polne matrike, preden jo lahko valčno transformiramo in stisnemo.

4 Metoda mnogokratnih polov (FMM)

Metoda FMM izvira iz algoritma za izračun medsebojne interakcije delcev, ki sta ga predlagala Greengard in Rokhlin [1]. Kasneje je bila uporabljena za različne namene, med drugim tudi za pospešitev reševanja homogene Laplaceove enačbe z metodo robnih elementov (Popov in sod. [4]). V tem prispevku jo bomo uporabili za razprtjen zapis območnih členov nehomogenih enačb.

Osnova FMM je razvoj jedra integrala v vrsto (torej fundamentalne rešitve v primeru $\beta_i^{c,\vec{\xi}}$ in njenega gradijenta v primeru $\vec{B}_i^{c,\vec{\xi}}$) in s tem ločitev spremenljivk - izvorne točke $\vec{\xi}$ in integracijske točke \vec{r} . Razvoja zapišemo s pomočjo sferičnih harmonikov Y takole:

$$\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{\xi}|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{(-1)^m}{2l+1} \frac{1}{\xi^{l+1}} Y_l^{-m}(\theta_\xi, \varphi_\xi) r^l Y_l^m(\theta_r, \varphi_r), \quad (7)$$

$$\vec{\nabla} \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{\xi}|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{(-1)^m}{2l+1} \frac{1}{\xi^{l+1}} Y_l^{-m}(\theta_\xi, \varphi_\xi) \left\{ l Y_l^m(\theta_r, \varphi_r) r^{l-2} \vec{r} + r^l \vec{\nabla} Y_l^m(\theta_r, \varphi_r) \right\}, \quad (8)$$

kjer sta $\vec{r} = (r, \varphi_r, \theta_r)$ in $\vec{\xi} = (\xi, \varphi_\xi, \theta_\xi)$ zapisana v krogelnem koordinatnem sistemu. Z določitvijo končnega števila členov v vrsti lahko vsak element območne matrike približno zapišemo z ločenima spremenljivkama kot

$$\beta_i^{c,\vec{\xi}} \approx \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l F_l^m(\vec{\xi}) \int_{\Omega_c} G_l^{m,i}(\vec{r}) d\Omega, \quad (9)$$

kjer F in G predstavljata zgoraj zapisane zveze. Število členov v razvoju določa natančnost približka in je enako $n_{exp} = (L+1)^2$.

Obravnavamo skupino n_r bližnjih izvornih točk in skupino n_c bližnjih območnih celic. Integrali izračunani za te izvorne točke po teh celicah tvorijo en del območne matrike. Ker sta spremenljivki v enačbi (9) ločeni, je mogoče namesto nje izvrednotiti dve matriki manjšega reda $(n_r \times n_{exp})$ in $(n_{exp} \times n_c)$. V prvi so členi razvoja F za vse izvorne točke, v drugi pa integrali G za vse celice v skupini. Množenje teh dveh majhnih matrik nam do napake aproksimacije vrne polno $n_r \times n_c$ matriko. Tega nikoli ne počnemo, saj shranujemo samo dve mali matriki in ju uporabljamo za izračun produktov z vektorji, brez da bi kdajkoli izračunali veliko polno matriko. Ta metoda prihrani spomin, če

$$2(n_r + n_c)n_{exp} < n_r n_c; \quad (10)$$

kjer do faktorja 2 na levi strani pride zaradi tega, ker so sferični harmoniki kompleksne funkcije in za shranjevanje potrebujejo dvakrat več spomina kot realna števila. Metoda deluje dobro, dokler sta skupini izvorni točk in območnih celic dovolj daleč narazen, da je število členov v razvoju lahko majhno.

Celotno območje in rob razdelimo z rekurzivnim postopkom v hierarhično drevesno strukturo, katerih veje so kombinacije skupin izvornih točk in območnih celic. Celotno območje je očrtano s heksaedrom in razkosano z ravninami, ki so vzporedne koordinatnim osem. Postopek je analogen enodimensionalnemu deljenju, kot je opisan v Ravnik in Žunič [6]. Da del območne matrike, ki ustreza kombinaciji skupin izvornih točk in območnih celic zapišemo kot produkt dveh manjših matrik mora biti izpolnjena enačba (10) in dosežena natančnost razvoja ϵ , ki jo predpišemo. Natančnost aproksimacije preverjamo s preverjanjem natančnosti razvoja v najbolj neugodni kombinaciji izvorne točke in območne celice.

5 Testi

Razvili smo dve metodi, ki omogočata razpršen zapis območnih matrik. Valčno transformacijo smo opisali v razdelku 3, metodo FMM pa v razdelku 4. Obe metodi smo primerjali pri reševanju Poissonovih enačb in enačb kinematike z zanimimi analitičnimi rešitvami. Z uporabo redkih računskih mrež (do 33^3 vozlišč) smo lahko primerjali rezultate dobljene tako s polno območno matriko, kot tudi z njenimi razpršenimi aproksimacijami. Za mero za razliko med rezultati smo izbrali vektorsko ∞ -normo in RMS vrednost. Če sta f in g dve rešitvi, potem

$$\|f - g\|_\infty = \max\{|f_1 - g_1|, \dots, |f_n - g_n|\}, \quad RMS = \sqrt{\frac{\sum(f_i - g_i)^2}{\sum f_i^2}}. \quad (11)$$

5.1 Poissonova enačba

Reševali smo Poissonove enačbe navedene v Tabeli 1 na enotski kocki. Na dveh nasprotnih si straneh smo predpisali znano funkcijo, na ostalih štirih smo predpisali tok. Uporabljali smo polno območno matriko $[B]$, z metodo FMM razpršeno območno matriko $[B']$ in valčno transformirano območno matriko $[B_w]$.

Tabela 1 : Poissonove enačbe z analitičnimi rešitvami. Geometrija je enotska kocka. Robni pogoji so pri vseh primerih enaki: $u(x=0) = 0$, $u(x=1) = 1$, $q(y=0, y=1, z=0, z=1) = 0$.

	Enačba	Analitična rešitev
a)	$\nabla^2 u = 2$	$u_a = x^2$, $q_{a,x=0} = 0$, $q_{a,x=1} = 2$
b)	$\nabla^2 u = 6x$	$u_a = x^3$, $q_{a,x=0} = 0$, $q_{a,x=1} = 3$
c)	$\nabla^2 u = 12x^2$	$u_a = x^4$, $q_{a,x=0} = 0$, $q_{a,x=1} = 4$

Enačbe smo reševali na treh mrežah, ki so imele enakomerno porazdeljenih 17^3 , 25^3 in 33^3 vozlišč. Naj bosta u_a, q_a analitična rešitev in naj u, q predstavljata rešitev, ki jo dobimo s polno matriko $[B]$. Norme razlike predstavljamo v Tabeli 2. Opazimo, da s povečanjem gostote mreže norma pada. Z uporabo Richardsonove ekstrapolacije in podatkov v tabeli smo red metode ocenili na 2.1.

Tabela 2 : Rešitve Poissonovih enačb iz tabele 1. Predstavljene so norme rešitev izračunanih s polno območno matriko $[B]$.

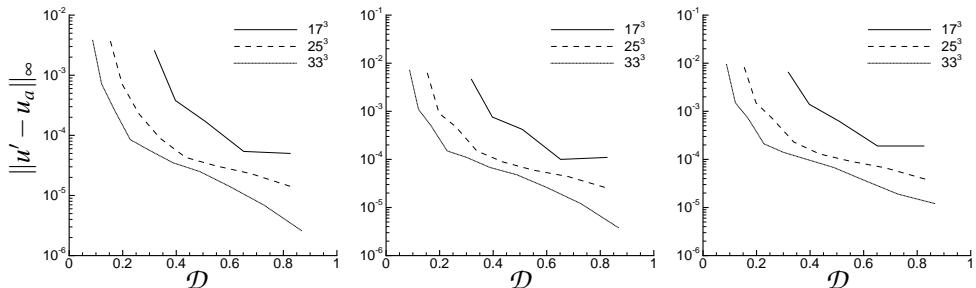
	problem	17^3	25^3	33^3
a)	$\ u - u_a\ _\infty$	$6.2 \cdot 10^{-6}$	$2.8 \cdot 10^{-6}$	$1.6 \cdot 10^{-6}$
a)	$\ q - q_a\ _\infty$	$6.4 \cdot 10^{-5}$	$4.0 \cdot 10^{-5}$	$3.9 \cdot 10^{-5}$
b)	$\ u - u_a\ _\infty$	$2.4 \cdot 10^{-5}$	$7.4 \cdot 10^{-6}$	$3.1 \cdot 10^{-6}$
b)	$\ q - q_a\ _\infty$	$7.7 \cdot 10^{-4}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$	$1.9 \cdot 10^{-4}$
c)	$\ u - u_a\ _\infty$	$9.0 \cdot 10^{-5}$	$2.8 \cdot 10^{-5}$	$1.2 \cdot 10^{-5}$
c)	$\ q - q_a\ _\infty$	$2.9 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$6.8 \cdot 10^{-4}$

Naj u', q' označujeta rešitev izračunano s pomočjo FMM razpršene oblike območne matrike $[B']$ in naj u_w, q_w označujeta rešitev izračunano s pomočjo valčno transformirane matrike $[B_w]$. Enačbe smo reševali z različnim številom členov v FMM vrsti in z različnimi mejami za zarezmanjanje členov v valčni matriki. Na slikah 1 in 2 prikazujemo norme v odvisnosti od razmerja D med količino podatkov v razpršeni območni matriki nasproti količini podatkov v polni matriki.

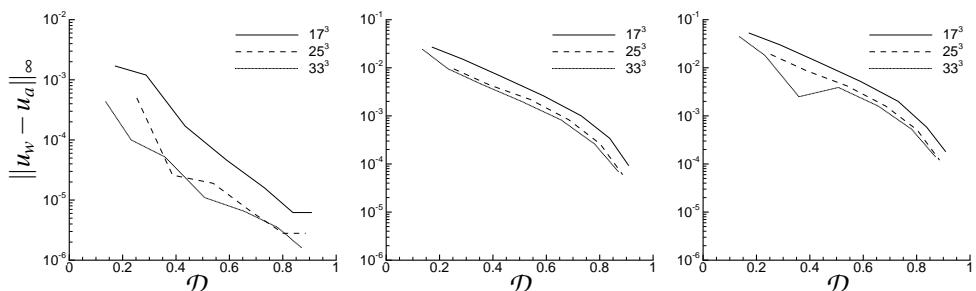
Pri primerjavi grafov vidimo, da za enako natančnost na gostejši mreži zadostuje matrika z bistveno zmanjšanim številom elementov. Primerjava med FMM metodo in valčno transformacijo pokaže boljše razmerje natančnost / količina podatkov v razpršeni matriki za FMM metodo za enačbi b) in c), medtem ko se valčna metoda izkaže za boljšo pri enačbi a). Razlog za to je v dejstvu, da je nehomogeni člen v enačbi a) konstanten, kar valčna transformacija s Haarovimi valčki zelo dobro popiše. Zaključimo lahko, da v splošnem FMM metoda daje boljše rezultate.

Ko primerjamo hitrost zmanjševanja norm s povečevanjem količine podatkov v razpršenih matrikah opazimo, da je le-ta približno eksponentna za valčno transformacijo in še hitrejša pri

FMM metodi. To dejstvo je najbolj izrazito pri majhnih \mathcal{D} , ki so za praktično uporabo teh algoritmov najpomembnejša.



Slika 1 : Grafi prikazujejo norme rezultatov dobljenih z FMM zapisom območne matrike v odvisnosti od razmerja med količino podatkov v razpršeni območni matriki in količino podatkov v polni matriki. Levo primer *a*) iz tabele 1, na sredini *b*) in na desni *c*).



Slika 2 : Grafi prikazujejo norme rezultatov dobljenih z valčnim zapisom območne matrike v odvisnosti od razmerja med količino podatkov v razpršeni območni matriki in količino podatkov v polni matriki. Levo primer *a*) iz tabele 1, na sredini *b*) in na desni *c*).

5.2 Enačba kinematike

Obravnavamo tri hitrostna in vrtinčna polja iz Tabele 3. Vsa so solenoidalna in zadostujejo enačbi kinematike. Polja smo izbrali tako, da so analitična in pa vsebujejo kar največje spremembe po prostoru. Izbrana polja omogočajo testiranje algoritmov, a niso fizikalna, saj ne zadostujejo Navier-Stokesovi enačbi.

Enačbe smo reševali na enotski kocki. Za neznanko smo izbrali ω_y na robu. Vsa ostala polja smo predpisali. Desno stran enačbe smo izračunali s polno, FMM in valčno območno matriko. V tabeli 4 navajamo RMS vrednosti za rešitve, ki smo jih izračunali s polnimi matrikami na dveh mrežah s po 25^3 in 33^3 vozlišči. RMS vrednosti za rešitve dobljene z razpršenimi območnimi matrikami so prikazane na grafih na sliki 3.

Tabela 3 : Hitrostna in vrtinčna polja, ki so rešitev enačbe kinematike v enotski kocki. Vsa polja razen robnih vrednosti $\vec{\omega}$ so znana.

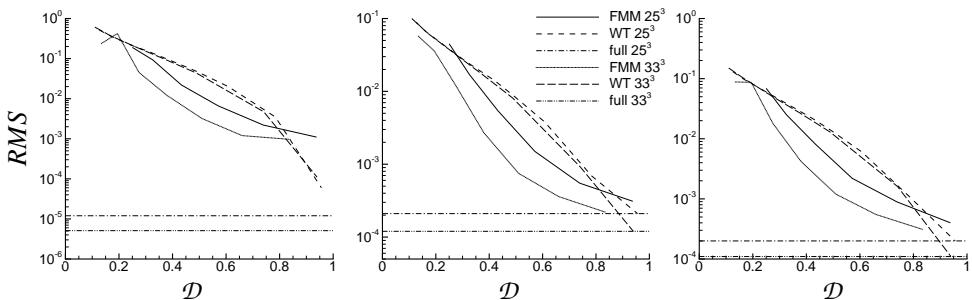
	hitrost, \vec{v}	vrtinčnost, $\vec{\omega}$
d)	$y^2 z, y, -z$	$(0, y^3, -3y^2 z)$
e)	$(\sin(z), \sin(x) \sin(y))$	$(\cos(y), \cos(z), \cos(x))$
f)	(e^z, e^x, e^y)	(e^y, e^z, e^x)

Na podlagi rezultatov lahko naredimo nekaj zaključkov. Prvič, uporaba gostejših mrež zagotavlja bolj natančno rešitev in omogoča uporabo večje razpršenosti območnih matrik. Drugič, pri majhnih razmerjih količine podatkov v razpršeni matriki $\mathcal{D} \ll 1$, pri katerih pričakujemo največjo praktično vrednost algoritmov, FMM metoda dosega večjo natančnost kot valčna metoda. Pri visokih razmerjih količine podatkov v razpršeni matriki $\mathcal{D} > 0.85$ je valčna metoda natančnejša. Razlog je v tem, da ko se količina podatkov v valčni matriki približuje količini podatkov v polni matriki gre napaka aproksimacije proti nič. Pri $\mathcal{D} = 1$ daje valčna metoda identične rezultate kot polna matrika. Pri FMM dosežemo identične rezultate šele, ko uporabimo neskončno število členov v vrsti. Vendar, ker visoka razmerja v količini podatkov niso pomembna za praktično uporabo, lahko zaključimo, da FFM metoda primernejša.

Ob primerjavi rezultatov za tri različne primere ugotavljamo, da je oblika RMS krivulj podobna, čeprav je rešitev s polno matriko za red velikosti boljša v primeru d) kot v primerih e) in f). Sklepamo, da je razpršena območna matrika glavni vir napake v algoritmu.

Tabela 4 : Rešitve enačb kinematike iz tabele 3. Predstavljene so RMS vrednosti za rešitve s polno matriko.

mreža	d)	e)	f)
25^3	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$2.1 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^{-4}$
33^3	$5.1 \cdot 10^{-6}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$



Slika 3 : Grafi prikazujejo RMS vrednosti v odvisnosti od razmerja količine podatkov v območnih matrikah \mathcal{D} za rešitve problemov d) levo, e) na sredini in f) desno. Uporabljeni je bila FMM in valčna (WT) razpršena oblika območne matrike. Vodoravne črte prikazujejo rešitev izračunano s polno območno matriko.

6 Zaključki

Robno območni integralski zapis Poissonove enačbe vključuje območni integral. Po diskretizaciji zahteva izračun elementov polne območne matrike. V prispevku smo prikazali uporabo metode mnogoterih polov in valčne transformacije za izdelavo razpršenega približka območne matrike. Zahteve po pomnilniku smo zmanjšali iz $O(n_d \cdot n_b)$ na $O(n_d)$, kjer je n_d število vozlišč v območju in n_b število vozlišč na robu.

Obe metodi smo testirali na skalarni Poissonovi enačbi in na vektorski enačbi kinematike. Ugotovili smo, da FMM metoda pri enaki količini podatkov v razpršeni območni matriki daje bolj natančne rezultate kot valčna transformacija. Glede na način izračuna členov v razpršeni matriki, je FMM tudi v prednosti, saj računamo samo člene v vrstah oziroma njihove integrale. Za izračun valčno transformirane območne matrike pa je potreben najprej izračun celotne polne matrike in šele nato sledi transformacija in zanemarjanje elementov. S stališča računalniškega spomina je to zelo neugodno. Problem je mogoče rešiti s pomočjo paralelnega računanja ali z bolj zamudnim shranjevanjem vmesnih rezultatov na disk. Po drugi strani je valčna transformacija popolnoma algebrajska metoda. To pomeni, da jo lahko brez kakršnihkoli sprememb uporabimo za izdelavo razpršene aproksimacije katerekoli polne matrike. FMM metoda pa sloni na razvoju jedra integrala in jo je zato potrebno prilagoditi za vsako integralsko jedro posebej.

Glavni cilj izvedene raziskave je razvoj metode transformacije matrike iz polne v razpršeno obliko, ki bo v procesu reševanja nelinearnega sistema diskretiziranih Navier-Stokes enačb zagotavljal stabilnost numerične sheme Metode robnih elementov. To pomeni, da prvemu koraku, izpeljavi tehnike transformacije polne matrike, v prihodnosti sledi korak testiranja vpliva aproksimacije integralov z metodo FMM na stabilnost in natančnost reševanja zahtevnih vezanih problemov v dinamiki tekočin.

Literatura

- [1] L. Greengard in V. Rokhlin. A fast algorithm for particle simulations. *J. Comput. Phys.*, 73:325–348, 1987.
- [2] W. Hackbusch. A sparse matrix arithmetic based on \mathcal{H} -matrices. Part I: Introduction to \mathcal{H} -matrices. *Computing*, 62:89–108, 1999.
- [3] P.W. Partridge, C.A. Brebbia in L.C. Wrobel. *The dual reciprocity boundary element method*. Computational Mechanics Publications, 1992.
- [4] V. Popov, H. Power in S. P. Walker. Numerical comparison between two possible multipole alternatives for the BEM solution of 3D elasticity problems based upon Taylor series expansions. *Eng. Anal. Boun. Elem.*, 27:521–531, 2003.
- [5] J. Ravnik, L. Škerget in M. Hriberšek. Diskretna valčna transformacija za metodo robnih elementov v mehaniki tekočin. V J. Korelc in D. Zupan, urednika, *Kuhljevi dnevi 2004*, strani 229–236. Slovensko društvo za mehaniko, 2004.
- [6] J. Ravnik in Z. Žunič. Uporaba hierarhičnih matrik za aproksimacijo polnih matrik. V J. Korelc in D. Zupan, urednika, *Kuhljevi dnevi 2007*, strani 197–204. Slovensko društvo za mehaniko, 2007.



Raziskave na brezlopatičnem turbokolesu iz odprto celičnega poroznega materiala

Gašper Benedik¹, Brane Širok², Marko Hočvar², Aljoša Močnik³

Research on bladeless impeller from open cell porous material

Povzetek.

Prispevek opisuje nov tip brezlopatičnega turbostroja, pri katerem se energija iz turbokolesa na fluid prenaša preko strukture poroznega materiala. Opisana je konstrukcijska izvedba turbokolesa ter podane teoretične osnove za popis toka fluida skozi rotirajoč porozen medij. Predstavljene so meritve integralnih aerodinamskih karakteristik različnih konstrukcijskih izvedb turbokoles ter materialov z različno povprečno velikostjo por. Prikazane so lokalne meritve radialnih in tangencialnih hitrosti na izstopnem obodu turbokolesa. Na podlagi opravljenih raziskav je teoretično in eksperimentalno utemeljeno delovanje novega tipa turbostroja.

Abstract.

Article describes a new type of bladeless turbo machine that transfers energy from impeller to fluid over structure of porous material. Impeller construction is described and theoretical description of fluid flow through rotating porous media is given. Measurements of integral aerodynamic characteristics of different construction variants of impellers and materials with different average pores size are presented. Measurements of local radial and tangential velocities on impeller exit circumference are shown. On the basis of performed research is theoretically and experimentally grounded working of new type of turbo machine.

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo ter Domel d.d., Železniki

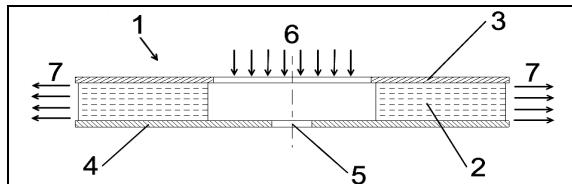
² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

³ Domel d.d., Železniki

1 Uvod

Prispevek obravnava centrifugalni turbostroj, pri katerem se prenos energije iz turbokolesa na fluid prenaša preko strukture poroznega materiala in ne preko lopatic, kot v običajnih turbostrojih [1]. Omenjen tip turbostroja poimenujemo brezlopatično turbokolo iz poroznega materiala. Brezlopatični turbostroj, pri katerem se energija prenese na fluid preko mejne plasti sorotirajočih diskov na majhni razdalji, je razvil že Tesla [2]. Do večje uporabe njegovega naprave ni prišlo, saj naj bi dosegal aerodinamske izkoristke do maksimalno 60 % v ozkem območju pretokov, do izgub naj bi prihajalo predvsem na vstopu in izstopu iz turbokolesa [3].

Z brezlopatičnim turbokolesom se je možno izogniti slabostim klasičnih turbokoles kot so vrtinčenje in odlepljanje toka, povratni tok ter tlačni sunki [4]. Izkoristek naprave po pričakovanjih dosega podobne vrednosti v širšem območju pretokov, saj ni lopatic z geometrijo, ki ustreza le nominalnemu obratovalnemu režimu. Tokovnice se v opisanem turbostroju spreminja v odvisnosti od obratovalnega režima. Slabost turbostroja z brezlopatičnim turbokolesom je tlačna izguba v porozni strukturi in s tem padec izkoristka turbokolesa. Zmanjšanje izkoristka je bolj izrazito pri višjih pretokih, saj upor narašča s hitrostjo toka zraka skozi porozen material [5]. Posledično izkoristek v optimalni točki delovanja po pričakovanju ne dosega izkoristka lopatičnega turbostroja. Glede na prejšnje ugotovitve je omenjeni tip turbostroja primeren za obratovanje v območju manjših pretokov.

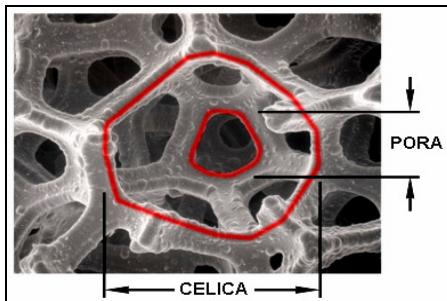


Slika 1: Idejni prikaz konstrukcije turbokolesa 7 iz poroznega materiala.

Slika 1 prikazuje enostavno izvedbo turbokolesa [6], kjer se energija iz turbokolesa 1 na fluid ne prenaša preko rotorskih lopatic, temveč preko rotirajoče strukture poroznega materiala 2. Porozen material 2, s katerim je delno ali v celoti zapolnjeno turbokolo 1, je iz mehansko trdnega poroznega materiala z odprto celično strukturo (Slika 3). Porozen material 2 je vstavljen med spodnjo 3 in zgornjo steno 4. Turbokolo je pritrjeno na gred elektromotorja, in se vrti okoli osi 5. Fluid v turbokolu vstopa aksialno v smeri 6 in izstopa radialno v smeri 7.



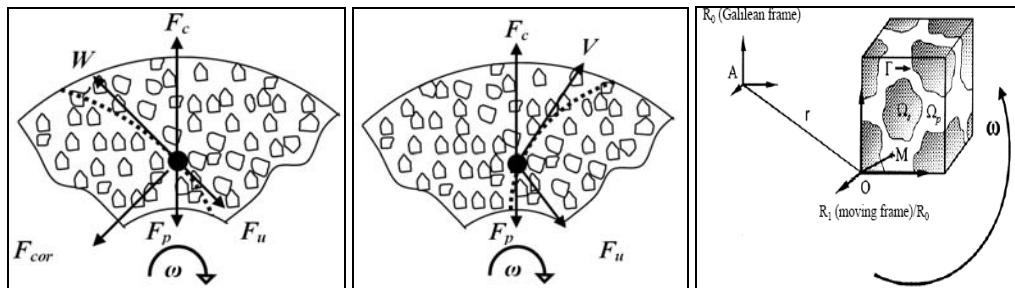
Slika 2: Fotografija običajnega lopatičnega turbokolesa na desni, turbokolesa iz poroznega materiala v sredini ter turbokolesa iz poroznega materiala z dodanim radialnim inducerjem.



Slika 3: Uporabljen material v modelnih izvedbah turbokoles je aluminij odprto celične strukture z 88% poroznostjo proizvajalca ERG materials.

2 Teoretične osnove toka fluida skozi porozen medij

Slika 4 prikazuje sile, ki delujejo na elementaren delec fluida [1]. F_u je sila upora, ki deluje v nasproti smeri relativne hitrosti v mediju W . F_c je centrifugalna sila in je posledica rotacije delca s kotno hitrostjo ω . F_p je tlačna sila, ki je posledica spremembe tlaka na eni in drugi strani elementarnega volumna fluida. Coriolisova sila, ki deluje pravokotno na os rotacije in smer gibanja delca, je prisotna le v relativnem koordinatnem sistemu.



Slika 4: Prikaz sil na elementaren volumen fluida pri potovanju skozi rotirajoč porozen medij, levo v relativnem ter na sredini v absolutnem koordinatnem sistemu. Desno je prikazana skica rotirajočega poroznega medija, ki rotira s kotno hitrostjo ω [10,11].

Pretok fluida pri visokih hitrostih popišemo z nadgrajenimi Darcy-evimi enačbami, ki se imenujejo Forchheimerjeve enačbe in jih je možno s pomočjo homogenizacijske tehnike izpeljati iz Navier-Stokesovih enačb [7]:

$$\frac{\mu}{K} v + C \cdot |v| \cdot v + b \cdot |v|^2 v = -\nabla p + f + \lambda \Delta v \quad \nabla v = 0 \quad (1)$$

V enačbi vektor v predstavlja hitrost, p tlak, f sile (gravitacija, elektromagnetne sile, centrifugalna sila, Coriolisova sila), μ viskoznost in matrika K prepustnost ter C upor. Koeficient b imenujemo Forchheimerjev koeficient in je običajno blizu 0, njegov vpliv je možno razbrati iz eksperimenta. Poroznost materiala je recipročna vrednosti volumskega deleža trdnine v poroznem materialu. V primeru poroznosti materiala blizu 1, je smiselna uporaba efektivne viskoznosti λ oziroma Brinkmanovega koeficiente. Za uporabo v diskru

efektivno viskoznost λ in Forchheimerjev koeficient b zanemarimo, kot so naredili vsi avtorji člankov, ki so raziskovali tok fluida skozi odprto celične kovinske pene podobne poroznosti [7-11] dobimo Darcy-Forchheimerjevo enačbo:

$$\frac{\mu}{K} v + C \cdot |v| \cdot v = -\nabla p + f \quad \nabla v = 0 \quad (2)$$

Matriko prepustnosti porognega materiala K in upora C , ki je opazen pri večjih hitrostih fluida, običajno določimo eksperimentalno. Nadaljujmo izpeljavo in nadgradimo enačbo še za rotirajoč porozen medij. Namesto izraza f bomo zapisali izraz za centrifugalno silo na elementaren delec fluida:

$$f = \rho \cdot \omega^2 \cdot x \cdot e_w \quad (3)$$

$$\frac{\mu}{K} v + C \cdot |v| \cdot v = -\nabla p + \rho \cdot \omega^2 \cdot x \cdot e_w \quad \nabla v = 0 \quad (4)$$

Zapis je izredno poenostavljen. V literaturi avtorji navajajo, da zaradi rotacije matrika prepustnosti K ni več simetrična. Pri obravnavanju diska se vektor hitrosti v pri pretoku zaradi povečevanja pretočnega preseka spreminja v odvisnosti od polmera diska r .

3 Opis eksperimenta

Poglavlje zajema opis integralnih meritev zračnega toka turbostroja, opis lokalnih meritev zračnega toka na izstopu iz porognega materiala.

3.1 Integralne meritve zračnega toka

Integralne meritve zračnega toka obsegajo meritve izkoristka v odvisnosti od volumskega pretoka. Meritve so izvedene v podjetju Domel d.d. na merilni napravi, ki omogoča meritve integralnih lastnosti zračnega trubostrojev po standardu IEC 60312 [12]. Izkoristek turbokolesa η_{TK} je podan z razmerjem izhodne aerodinamske moči P_{air} in vhodne električne moči P_1 ter z izkoristkom elektromotorja η_M :

$$\eta_{TK} = \frac{P_{air}}{P_1} \cdot \frac{1}{\eta_M} = \frac{Q \cdot \Delta p}{P_1} \cdot \frac{1}{\eta_M} \quad (5)$$

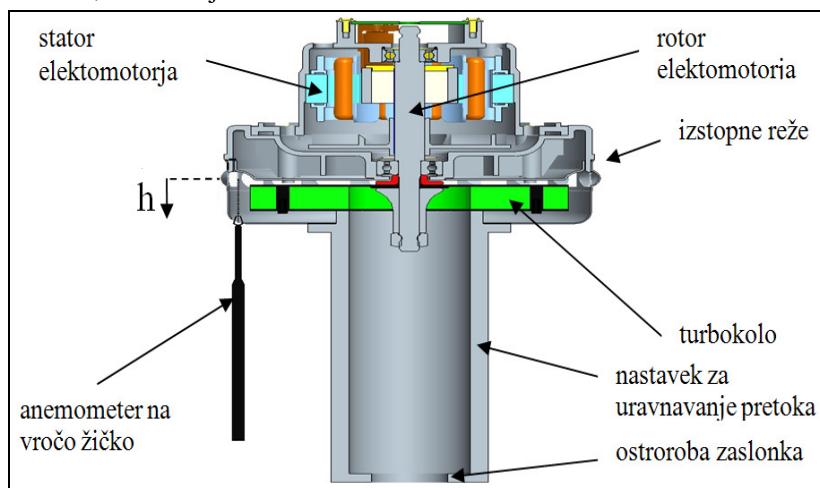
kjer je Q je izmerjeni volumski pretok in Δp izmerjen statični tlak. Merilna negotovost pri meritvi aerodinamskega izkoristka turbokolesa η_{TK} ali volumskega pretoka Q znaša do $\pm 3\%$.

Zaradi izračuna dejanskih izkoristkov turbokolesa je bilo potrebno izmeriti izkoristke elektronsko komutiranega motorja s krmilno elektroniko s pomočjo dinamometra v celotnem delovnem področju. Gred elektromotorja brez turbokolesa smo obremenili z momentom preko dinamometra proizvajalca Magtrol tip 2WB43-HS, ki zagotavlja zavorni moment z zaviranjem preko magnentega prahu. Meritve so mogoče do vrtilne hitrosti $65\,000\text{ min}^{-1}$ in do moči motorja 3 kW ter največjega dopustnega momenta na gredi 3 Nm . Merili smo naslednje veličine: napajalni tok in napetost, moment dinamometra ter vrtilno frekvenco motorja. Moment smo spremajali od 0 do 26 Ncm v koraku 2 Ncm . Negotovost meritve se nanaša na negotovost dinamometra, napajalne naprave ter spremenljivih karakteristik

motorja kot posledica segrevanja. Dodatno napako predstavlja aproksimacijska krivulja izkoristka v odvisnosti od vrtilne frekvence. Skupna meritna negotovost znaša 3 %.

3.2 Lokalne meritve zračnega toka

Lokalne meritve hitrostnega polja so bile izvedene v Laboratoriju za vodne in turbinske stroje na Fakulteti za strojništvo v Ljubljani z umerjenim anemometrom na vročo žičko Dantec Mini CTA z dvokomponentnim senzorjem 55P62. Žički senzorji debeline $5\mu\text{m}$ in dolžine 1,25 mm sta izdelani iz volframa in prekrita s platino. Frekvenca zajemanja podatkov je bila nastavljena na 50 kHz, čas zajemanja podatkov na 2 s. Temperatura žičke anemometra je bila nastavljena na 250°C. Oddaljenost med anemometrom in poroznim materialom je bila 3 mm. Meritve in umerjanje so bili izvedeni v skladu z postopkom, ki ga opisujeta Bruun [13] in Jørgenson [14]. Negotovost meritve se nanaša na negotovost nastavitev delovnih točk, negotovosti potenciometra, pozicije anemometra, merjenja temperature ter vlažnosti zraka, ki vplivata na točnost umerjanja anemometra in popravka napetosti zaradi spremenjanja temperature ob meritvi, nelinearnosti zaznavala in končnega časa zajemanja podatkov. Največja negotovost se pojavi ob umerjevalni krivulji. Skupna meritna negotovost meritov znaša $\pm 2,8\%$ od dejanske vrednosti.

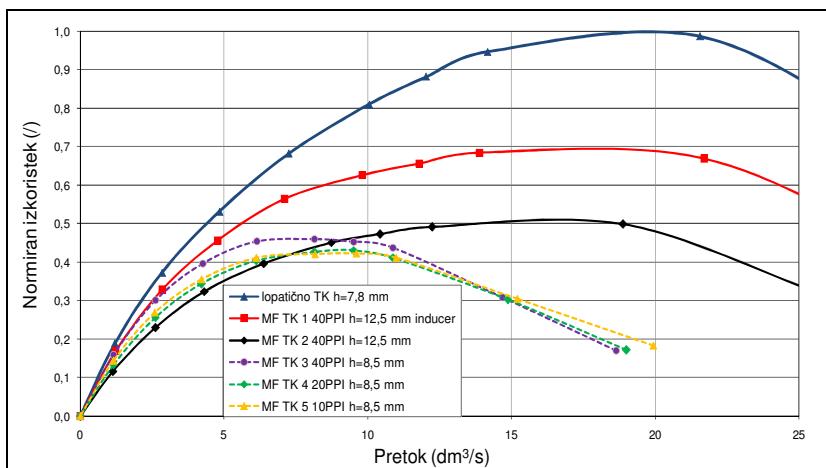


Slika 5: Skica meritev lokalnih hitrosti na izstopu iz turbokolesa.

Na sliki 5 je prikazan motor z vgrajenim turbokolesom, anemometrom na vročo žičko ter nastavkom za uravnavanje pretoka. Označena so meritna mesta, kjer se je nahajal senzor anemometra med meritvijo. Obratovalno točko smo zagotovljali z ustreznim nastavkom – meritno zaslonko za uravnavanje pretoka, ki smo jo namestili pred vstopom v turbokolo.

4 Rezultati integralnih meritev izkoristkov in podtlakov

Z integralnimi meritvami aerodinamskih izkoristkov η_{TK} in statičnih tlakov Δp turbokoles smo ugotovljali vpliv širine turbokolesa h , velikosti celic materiala ter radialnega inducerja.

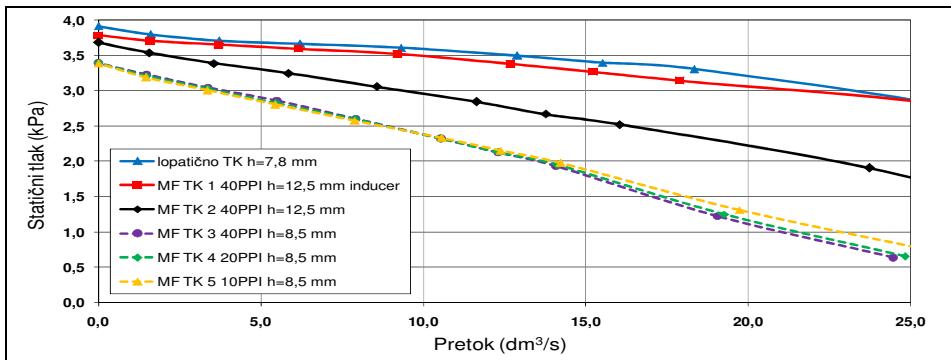


Slika 6: Graf normiranih izkoristkov turbokoles v odvisnosti od volumskega pretoka.

Iz grafa na sliki 6 je razvidno, da lopatično turbokolo dosega ca. 25 % višje izkoristke v območju pretokov nad 10 dm³/s od turbokolesa iz poroznega materiala z vgrajenim inducerjem (MF TK 1), v območju nižjih pretokov pa je razlika manjša. Iz grafa je prav tako razvidno, da radialni inducer izboljša izkoristek turbokolesa za ca. 20 % (MF TK 1 in 2). Iz tega lahko sklepamo, da do največjih izgub v turbokolesu prihaja prav v vstopnem ustju zaradi velikih relativnih hitrosti pri »vsiljevanju« rotacije zraku v primeru odsotnosti radialnega inducerja.

Izkoristek turbokolesa se v območju volumskih pretokov nad 10 dm³/s izrazito poveča z povečevanjem širine turbokolesa (MF TK 3 iz h=8,5 mm na MF TK 2 h=12,5 mm). V območju volumskih pretokov okrog 5 dm³/s se izkoristek s povečevanjem širine turbokolesa zmanjša. Z zmanjševanjem širine turbokolesa se relativne hitrosti zraka glede na porozen material linearno povečujejo. Ker tlačne izgube pri pretoku skozi porozen material za turbulenten tok naraščajo kvadratno s povečevanjem relativne hitrosti (Enačba 4) je logična posledica znatno nižji izkoristek v območju velikih volumskih pretokov.

Pri primerjavi turbokoles iz materialov z različnimi velikostmi celic in enako poroznostjo (MF TK 5 - 10 PPI – premer pore celice 2,5 mm, MF TK 4 - 20 PPI – premer pore celice 1,25 mm ter MF TK 3 - 40 PPI - premer celice 0,625mm) ugotovimo relativno majhne razlike v aerodinamskih izkoristkih. V območju velikih pretokov dosega turbokolo z večjimi porami (MF TK 5) malenkost boljše izkoristke zaradi nižjega tlačnega padca pri pretoku fluida. Pretok fluida namreč ovira manjše število ligamentov, prav tako je površina mejne plasti manjša kot pri materialu z manjšimi celicami in isto poroznostjo (MF TK 3). V območju majhnih pretokov najboljše izkoristek dosega turbokolo z majhnimi celicami (MF TK 3), vzrok je v optimalnejšem koeficientu upora materiala C pri pretoku fluida, ki ne povzroča prevelikih pretočnih izgub in hkrati omogoča zadosten prenos energije iz strukture poroznega materiala na fluid (Enačba 4).



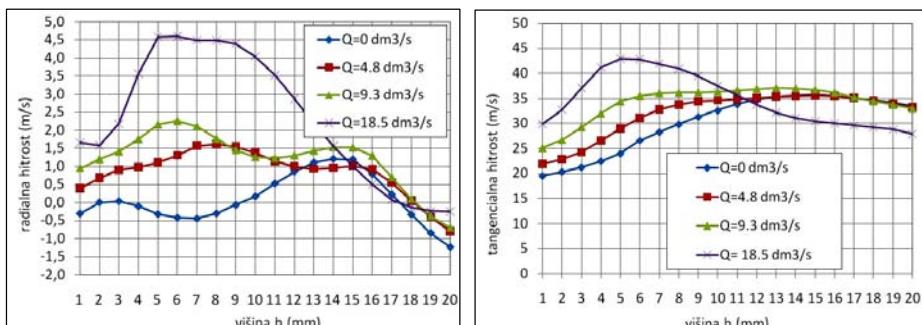
Slika 7: Statični tlak v odvisnosti od pretoka pri konstantni vrtilni frekvenci $13\ 000\ \text{min}^{-1}$.

Iz grafa na sliki 7 je razvidno, da lopatično turbokolo in turbokolo iz poroznega materiala z vgrajenim radialnim inducerjem (MF TK 1) dosega primerljivo tlačno razliko pri konstantni vrtilni frekvenci. Nižjo doseženo tlačno razliko turbokoles (MF TK 3, 4 in 5) brez vgrajenega inducerja si razlagamo z velikimi tlačnimi padci pri vstopu zraka v turbokolo. Nižje dosežene tlačne razlike pri turbokolesih manjše širine (MF TK 3, 4 in 5) so posledica večjih tlačnih padcev zaradi večjih relativnih hitrosti zraka v skladu z enačbo 4 (Enačba 4).

Prikazane karakteristike turbostroja je v nadaljevanju možno dodatno izboljšati. Z vgradnjom ustreznega inducerja je mogoče dodatno zmanjšati vstopne izgube, z vgradnjom lopatičnega difuzorja pa izkoristiti preostalo kinetično energijo na izstopu iz turbokolesa. Prav tako so rezerve na optimizaciji geometrije pretočnega preseka iz poroznega materiala.

4.1 Rezultati lokalnih meritev izstopnih hitrosti

Sledi predstavitev rezultatov lokalnih meritev izstopnih hitrosti na turbokolesu z radialnim inducerjem (Slika 6 in 7: MF TK 1) z hot-wire anemometrom, ki so opisane v poglavju 3.2.



Slika 8: Profil izstopnih hitrosti v odvisnosti od višine turbokolesa h , levo so prikazane radialne in desno tangencialne hitrosti.

Integral celotne meritve radialne hitrosti po višini turbokolesa na sliki 8 se dokaj natančno ujame z izmerjenimi volumskimi pretoki, kar je v skladu s pričakovanji. Pri pretoku $0\ \text{dm}^3/\text{s}$ opazimo pojav recirkulacije. Zrak v zgornjem delu turbokolesa ($h > 10\ \text{mm}$) izstopa, v

srednjem delu ($3 \text{ mm} < h < 9 \text{ mm}$) pa vstopa turbokolo. Pri največjih pretokih prihaja do največjih radialnih hitrosti zračnega toka v sredini turbokolesa ($5 \text{ mm} < h < 9 \text{ mm}$). Meritve tangencialnih hitrosti so v območju meritev obodne hitrosti turbokolesa. Padanje tangencialnih hitrosti z zmanjševanjem volumskega pretoka je posledica spremenjenih tokovnic zračnega toka, ki potekajo v smeri nazaj zakriviljenih rotorskih lopatic.

5 Zaključek

Prispevek opisuje nov tip brezlopatičnega turbostroja, pri katerem se energija iz turbokolesa na fluid prenaša preko strukture poroznega materiala. Opisana je konstrukcijska izvedba turbokolesa, kjer je disk iz poroznega materiala vstavljen med dve med seboj povezani steni, v eni izvedbi z radialnim inducerjem. Podane so teoretične osnove toka fluida skozi rotirajoč porozen medij. Opisan je postopek meritev integralnih karakteristik samega turbokolesa ter lokalnih hitrosti zračnega toka na izstopu iz turbokolesa z anemometrom na vročo žičko. Prikazane so meritve integralnih karakteristik različnih konstrukcijskih izvedb turbokoles ter materialov z različno povprečno velikostjo por. Najboljše aerodinamske karakteristike dosežemo z večanjem širine turbokolesa ter z vgradnjo radialnega inducerja. Podani so rezultati lokalnih meritev radialnih in tangencialnih izstopnih hitrosti iz turbokolesa. Opažen je pojav recirkulacije na izstopu pri minimalnem volumskem pretoku. Na podlagi opravljenih raziskav je teoretično in eksperimentalno utemeljeno delovanje novega tipa turbostroja, ki ob trenutni izvedbi ne dosega aerodinamskih karakteristik lopatičnih centrifugalnih turbostrojev.

Literatura

- [1] Benedik, G., Širok, B., Hočevar, M.: Študija aerodinamskih karakteristik tubrbopuhal pri gorivnih celicah, Prvi podiplomski seminar, Ljubljana, 2008
- [2] Tesla, N.: Fluid propulsion P1061142, Patentna prijava, New York, 1913
- [3] Rice, W.: Tesla turbomachinery on international Nikola Tesla symposium, Arizona, USA, 1991
- [4] Lakshminarayana, B.: Fluid dynamics and heat transfer of turbomachinery, Aerospace Engineering, Pennsylvania, USA, 1996
- [5] Dukhan, N.: Correlations for the pressure drop for flow through metal foam, Detroit, USA, 2006
- [6] Širok, B., Benedik, G., Močnik, A.: Rotor centrifug. turbostroja, patentna prijava, Ljubljana, 2008
- [7] Sprößig, W.: Fluid flow in porous media (www.mathe.tu-freiberg.de)
- [8] Flow in rotating porous media Chapt 4, Fluid transport of Porous Media, 1997, Prieur P.
- [9] Dukhan, N., Patel, P.: Equivalent particle diameter and length scale for pressure drop in porous metals, Detroit, USA
- [10] Auriault, J. L., Geindreau, C., Royer, P.: Coriolis effects during fluid flow in rotating porous media, Grenoble, France, 2002
- [11] Sawicki, E., Geindreau, C., Auriault, J. L.: Coriolis effects during fluid flow through rotating granular porous media, Gernobile, France, 2005
- [12] Standard IEC 60312: 1998+A1:2000+A2:2004: Vacuum cleaners for household use – Methods of measuring performance, 2005
- [13] H. Bruun, Hot-wire anemometry – Principles and signal analysis, Oxford university press, New York, 1995
- [14] F.E. Jørgensen, How to measure turbulence with hot-wire anemometers, A practical guide, Dantec Dynamics, 2005



Tokovni režim okoli mehurja v odvisnosti od premera mini-kanala

Z. Rek¹ in I. Žun²

Elongated bubble flow regime as a function of mini-channel diameter

Povzetek. V prispevku je predstavljena numerična simulacija tokovnega režima okoli mehurja v mini-kanalu. Za različne premere kanala sta izračunana hitrost in premer meniskusa mehurja. S temi parametromi so izvrednotena brezdimenzijska števila, na osnovi katerih skušamo postaviti ločnico med režimom mini- oz. micro-kanala. Rezultat numerične simulacije je validiran z eksperimentom.

Abstract. This paper deals with the numerical simulation of elongated bubble flow regime in a mini-channel. The velocity and curvature of the bubble meniscus are computed and the dimensionless numbers are evaluated. They serve as a criteria to distinguish between the regime of mini- and micro-channel. Numerical simulation results are validated by experiment.

1 Uvod

Poznavanje tokovnih razmer v mini- oz. mikro-kanalih je vedno bolj pomebno, saj gre razvoj v smeri miniaturizacije sistemov [4]. To je še posebej vidno pri aplikacijah v „Micro Electro Mechanical Systems“ (MEMS) tehnologiji, kjer je največji problem učinkovit odvod toplote. Ker so topotni tokovi zelo veliki, lahko pride do uparjanja hladilnega medija in pojavi se režim dvofaznega toka.

V makro območju je bilo narejenih že veliko raziskav tokovnih režimov dvofaznega toka, tako, da je na voljo precej eksperimentalnih podatkov in numeričnih analiz. Vendar te ugotovitve niso enostavno prenosljive na nižje skale, saj se dvofazni tok v vsakem področju dimenzij (mini-, mikro-, nano-skala) obnaša drugače [2]. Iz objavljenih literatur je razvidno, da ni enotne klasifikacije oz. ostre meje med skalami [3],[5].

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

V tem prispevku skušamo ugotoviti vpliv dimenzijske kanala na tokovni režim okoli mehurja, ki nastane z uparjanjem kapljevine. S pomočjo brezdimenzijskih števil skušamo določiti kriterije, ki povedo ali gre za tokovni režim mini- oz. mikro-kanala.

2 Numerični model

Za numerično simulacijo smo uporabili programski paket Fluent 6.3 z VOF modelom dvofaznega toka [1].

2.1 Osnovne enačbe

Stično površino („interface“) med dvema fazama dobimo z rešitvijo kontinuitetne enačbe za volumski delež („volume fraction“) ene od faz. Za fazo q ima enačba obliko

$$\frac{1}{\rho_q} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_q \rho_q) + \nabla \cdot (\alpha_q \rho_q \vec{v}) \right] = S_{\alpha_q} + \sum_{p=1}^2 (\dot{m}_{pq} - \dot{m}_{qp}) \quad (1)$$

Člen S_{α_q} predstavlja izvor mase, medtem ko člena \dot{m}_{pq} in \dot{m}_{qp} predstavlja prenos mase med fazama. Volumski delež primarne faze je določen s pogojem

$$\sum_{q=1}^2 \alpha_q = 1 \quad (2)$$

V območju rešujemo eno gibalno enačbo, ki je odvisna od volumskih deležev obeh faz

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu (\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T)] + \rho \vec{g} + \vec{F} \quad (3)$$

Fazi si delita hitrostno in tlačno polje. Gostota in viskoznost sta določeni z enačbama

$$\begin{aligned} \rho &= \alpha_2 \rho_2 + (1 - \alpha_2) \rho_1 \\ \mu &= \alpha_2 \mu_2 + (1 - \alpha_2) \mu_1 \end{aligned} \quad (4)$$

Brezdimenzijska števila predstavljajo razmerja sil. Pri dvofaznem toku v kanalih so prisotne sile: vztrajnost, viskoznost, gravitacija in površinska napetost. V analizi uporabljamo naslednja brezdimenzijska števila:

- Reynoldsovo število (vztrajnost : viskoznosti) $Re = \rho u_B d_B / \mu$
- Kapilarno število (viskoznost : površ. napetost) $Ca = \mu u_B / \sigma$
- Eötvösovo število (gravitacija : površ. napetost) $Eo = g(\rho - \rho_p) d_B^2 / \sigma$
- Froudovo število (vztrajnost : gravitacija) $Fr = u_B^2 / g d_B$
- Weberjevo število (vztrajnost : površ. napetost) $We = \rho u_B^2 d_B / \sigma$
- Arhimedovo število (gravitacija : viskoznosti) $Ar = g \rho_p (\rho - \rho_p) d_B^3 / \mu^2$

Kjer so: ρ – gostota kapljevine, ρ_p – gostota plina (pare), μ – dinamična viskoznost kapljevine, g – gravitacijski pospešek in σ – koeficient površinske napetosti.

V tej analizi smo za karakteristično hitrost izbrali hitrost gibanja mehurčka u_B in za karakteristično dolžino premer meniskusa mehurčka d_B , ki ga dobimo na naslednji način:

- V Fluentu je ustvarjena 3D oblika mehurja kot izo-površina za $\alpha=0,5$.

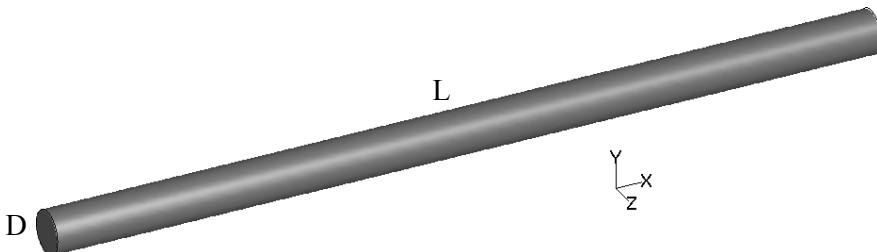
- Kreirana je kontura mehurja kot presečišče ravnine $z=0$ in izo-površine.
- Skozi točke konture je konstruiran kubični spline [7]:

$$\begin{aligned}
 x &= Ax_j + Bx_{j+1} + Cx''_j + Dx''_{j+1} \\
 y &= Ay_j + By_{j+1} + Cy''_j + Dy''_{j+1} \\
 A &= \frac{t_{j+1}-t}{t_{j+1}-t_j} \quad B = \frac{t-t_{j+1}}{t_{j+1}-t_j} \\
 C &= \frac{1}{6}(A^3 - A)(t_{j+1}-t_j)^2 \quad D = \frac{1}{6}(B^3 - B)(t_{j+1}-t_j)^2 \\
 0 \leq \dots \leq t_j \leq t \leq t_{j+1} \leq \dots \leq 1, \quad j &= 1, n
 \end{aligned} \tag{5}$$

- Koeficienti A, B, C in D so določeni s pogojem zveznosti prvih in drugih odvodov.
- Analitično so izračuni odvodi: x' , y' , x'' in y'' .
- Izračunana je ukrivljenost konture: $K=(x'y''-y'x'')/(x'^2+y'^2)^{3/2}$
- Izračunan je radij meniskusa: $r_B=1/K(x_{max}, 0)$.

2.2 Diskretni modeli

Računska območja predstavljajo kanali (cevi) s premeri $D=0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,1; 0,05\text{mm}$ in dolžino $L=20D$, slika 1.

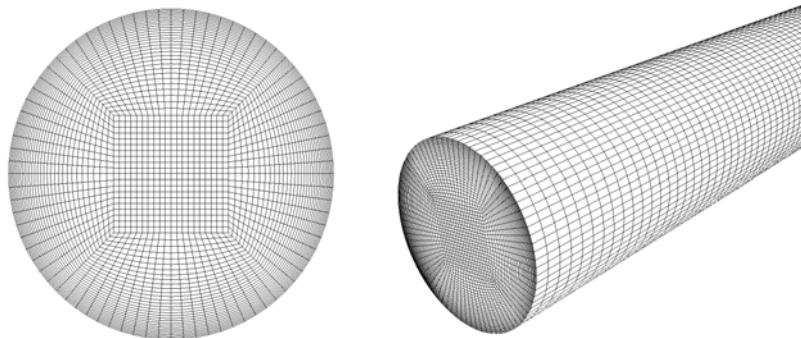


Slika 1: Geometrija mini-kanalov.

Domena je diskretizirana z blok-strukturirano mrežo s 700.000 heksaedričnimi celicami, ki so zgoščene proti steni. Razmerje med največjo in najmanjšo celico v radialni smeri je 5:1, medtem ko je mreža v vzdolžni smeri enakomerna, slika 2.

2.3 Parametri simulacije

Za reševanje enačb diskretnega sistema je bila uporabljena implicitna formulacija na tlaku temelječega solverja z implicitno shemo prvega reda za časovno neustaljene razmere. Za VOF model je bila izbrana eksplisitna shema. Za sklopitev tlak-hitrost je bila uporabljena SIMPLE metoda. Za diskretizacijo tlaka smo uporabili PRESTO! shemo, za gibalno enačbo privetno shemo drugega reda in za enačbo volumskega deleža metodo geometrijske rekonstrukcije. Podrelaksacijski faktorji so bili za vse spremenljivke enaki 1. Časovni korak Δt je bil izbran tako, da je v 14.000 korakih mehurček prispel do konca cevi. Znotraj časovnega koraka je bil konvergenčni kriterij 10^{-4} oz. največ 20 iteracij.

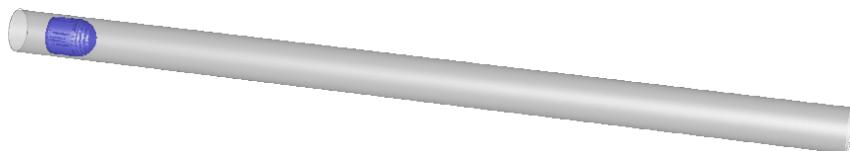


Slika 2: Računska mreža.

2.4 Začetni in robni pogoji

Na vstopu v računsko območje je bil predpisan popolnoma razvit laminarni profil hitrosti: $u=u_0(1-4r^2/D^2)$ in $v=w=0$, pri čemer je u_0 določen s pogojem, da je Reynoldsovo število v vseh primerih enako ($Re_D=960$). V območje vstopa samo kapljevina. Na izstopu je predpisan pogoj „outflow“, ki predstavlja ekstrapolacijo vrednosti iz notranjosti.

Začetni pogoj je bil definiran z uporabniško funkcijo, s katero je bila predpisana začetna „bullet“ oblika, slika 3.



Slika 3: Začetna oblika mehurčka.

Hladilo R-134a ima pri tlaku nasičenja $p_s=773,7$ kPa in temperaturi nasičenja $T_s=303,31$ K naslednje lastnosti:

Tabela1: Snovske lastnosti R-134a.

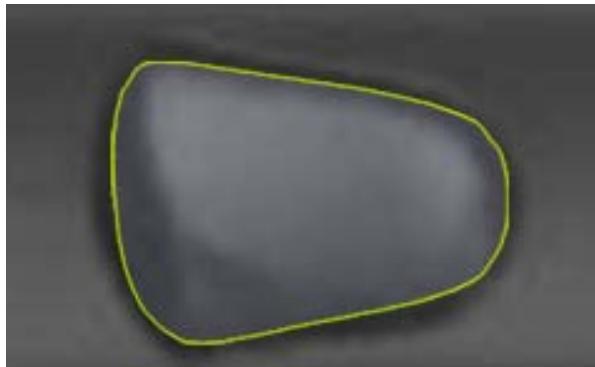
faza	gostota	viskoznost	površ. napetost
kapljevina	1187 kg/m ³	185,4 10 ⁻⁶ kg/s	
para	37,71 kg/m ³	12,05 10 ⁻⁶ kg/s	0,0074 N/m

3 Rezultati in diskusija

3.1 Validacija izračuna

V laboratoriju LTCM na EPFL v Lausanni je bil narejen eksperiment, pri katerem so uporabili optično merilno metodo za določitev frekvence generacije mehurčkov v mikrouparjalniku [6]. V stekleni cevki premera 0,5 mm, napolnjeno s hladilom R-134a, so opazovali hitrost združevanja mehurčkov v večje mehurje in porazdelitev njihovih dolžin. Iz videoposnetka smo izbrali sekenco, ki prikazuje gibanje osamljenega večjega mehurja. S programom, ki je bil razvit v LFDT, smo izračunali njegov volumen in ocenili debelino

kapljevinskega filma. Te podatke smo uporabili kot začetni pogoj v numerični simulaciji. Ko je mehur dobil končno obliko, smo izračunano konturo primerjali z obliko pri eksperimentu. Kot vidimo na sliki 4, se obliki zelo dobro ujemata. To pomeni, da lahko z VOF metodo dobro opišemo tokovni režim pri gibanju mehurja v mini-kanalu.



Slika 4: Izračunana kontura mehurčka superponirana na realno obliko.

3.2 Brezdimenzijska števila

Hitrost gibanja meniskusa mehurja in njegova ukrivljenost oz. premer krivinskega kroga, tabela 2, sta osnova za izračun brezdimenzijskih števil, tabela 3.

Tabela 2: Hitrost mehurja in premer meniskusa.

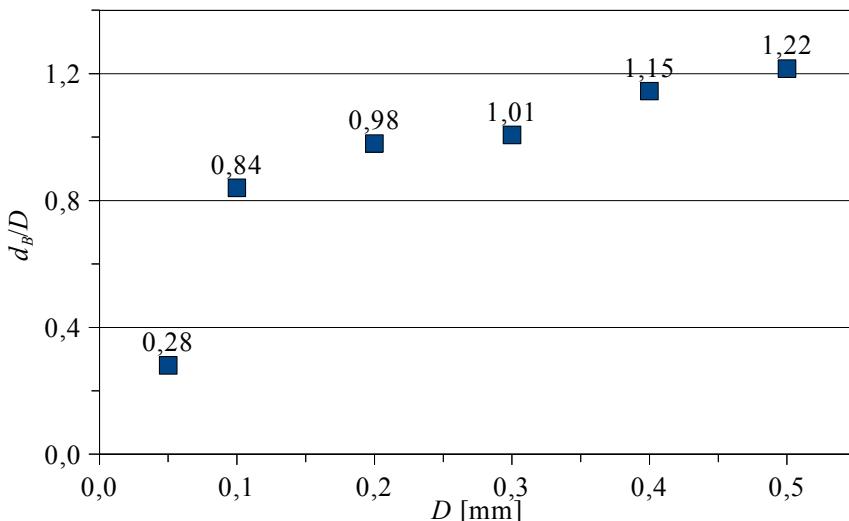
D	[mm]	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
d_B	[mm]	0,014	0,084	0,196	0,302	0,458	0,608
u_B	[m/s]	0,360	0,469	0,632	1,013	2,120	4,487

Tabela 3: Brezdimenzijska števila.

D	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Re	402	1140	1271	1222	1375	1401
Ca	0,112	0,053	0,025	0,016	0,012	0,009
Eo	$3,8 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$6,1 \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$3,8 \cdot 10^{-4}$
Fr	73297	2727	534	135	49	22
We	45,21	60,56	32,26	19,35	16,16	12,64
Ar	1,07	230,76	$2,93 \cdot 10^3$	$1,07 \cdot 10^4$	$3,74 \cdot 10^4$	$8,75 \cdot 10^4$

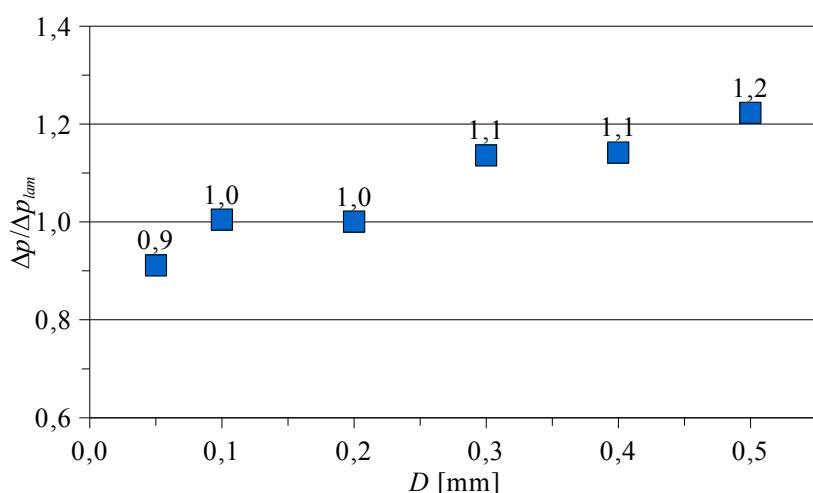
Iz analize brezdimenzijskih števil vidimo, da ima sila površinske napetosti (Ca, Eo, We) velik vpliv na tokovni režim pri kanalih z $D \leq 0,3$ mm. Sila viskoznosti (Re, Ar) prevladuje v primerih, ko je $D \geq 0,1$ mm. Gravitacijska sila (Eo, Fr, Ar) ima vpliv le pri večjih D .

Dober pokazatelj razmer je normirani premer meniskusa mehurčka, slika 5, kjer opazimo dve območji: za $D < 0,25$ mm je razmerje < 1 in za $D > 0,25$ mm z razmerjem > 1 .



Slika 5: Normirani premer meniskusa mehurčka.

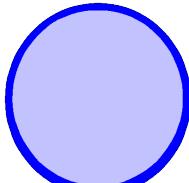
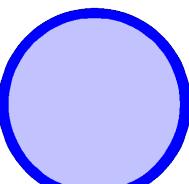
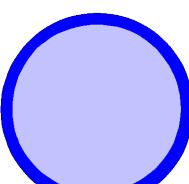
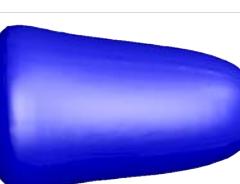
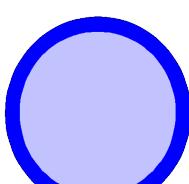
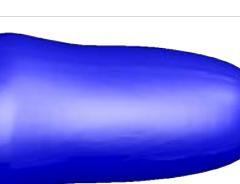
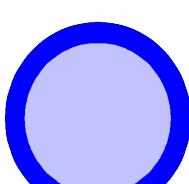
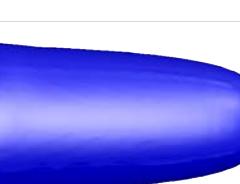
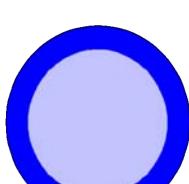
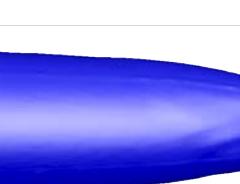
Graf normiranega padca tlaka, t.j. razmerje med padcem tlaka v dvofaznem toku in padcem tlaka pri popolnoma razvitem laminarnem enofaznem toku, v odvisnosti od premera kanala je prikazan na sliki 6. Tudi v tem primeru sta jasno vidni dve območji: za $D < 0,25$ mm je razmerje ≤ 1 in za $D > 0,25$ mm z razmerjem > 1 .



Slika 6: Normirani padec tlaka.

V tabeli 4 so zbrane oblike mehurjev in debelina kapljevinskega filma na mestu, kjer je mehur najširši. Vidimo, da je oblika zelo odvisna od premera kanala. Pri večjih premerih je mehur bolj koničen, premer meniskusa je večji od premera kanala, kapljevinski film je tanek in zaradi vzgona nesimetričen. Pri manjših premerih je mehur bolj valjaste oblike, premer meniskusa je manjši od premera kanala, kapljevinski film pa debelejši in simetričen.

Tabela 4: Oblika mehurčka in debelina kapljevinskega filma.

D	Debelina filma	Oblika mehurčka
$0,5mm$		
$0,4mm$		
$0,3mm$		
$0,2mm$		
$0,1mm$		
$0,05mm$		

4 Zaključki

S programskim paketom Fluent smo z VOF metodo numerično simulirali tokovni režim okoli parnega mehurja v odvisnosti od velikosti kanala, v katerem se giblje hladilo R-134a. Računsko območje smo diskretizirali z blok-strukturirano mrežo s 700.000 heksaedričnimi celicami.

Validacija numeričnega izračuna za obliko mehurja kaže na dobro ujemanje s konturo, dobljeno z experimentom.

Analiza brezdimenzijskih števil, ki temeljijo na hitrosti gibanja meniskusa mehurja in njegovim premerom, potrjuje predpostavko, da je tokovni režim okoli mehurja močno odvisen od premera kanala. Tudi iz grafov normiranega premera meniskusa in normiranega padca tlaka vidimo, da obstajata dve območji tokovnega režima.

Na osnovi teh analiz sklepamo:

- pri kanalih z $D \leq 0,1$ mm prevladuje tokovni režim mikro-kanala,
- pri kanalih z $D \geq 0,4$ mm prevladuje tokovni režim mini-kanala,
- območje $0,2 \text{ mm} \leq D \leq 0,3 \text{ mm}$ predstavlja prehodno območje.

Literatura

- [1] *Fluent 6.3 Documentation*, Fluent Inc., 2006.
- [2] H. Herwig, *Flow and Heat Transfer in Micro Systems: Is Everything Different or Just Smaller?* ZAMM, 82 (2002) 9, 579-586.
- [3] H. Herwig, O. Hausner, *Critical view on “new results in micro-fluid mechanics”: an example*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 46 (2003), 935-937.
- [4] K. Mishima, T. Hibiki, *Some characteristics of air-water two-phase flow in small diameter vertical tubes*. International Journal of Multiphase Flow, 22 (1996), 703-712.
- [5] M. Gad-el-Hak, *Comments on “critical view on new results in micro-fluid mechanics”*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 46 (2003), 3941-3945.
- [6] R. Revellin, V. Dupont, T. Ursenbacher, J.R. Thome, I. Zun, *Characterization of diabatic two-phase flows in microchannels: Flow parameter results for R-134a in a 0.5 mm channel*. International Journal of Multiphase Flow, 32 (2006), 755-774.
- [7] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A Teucolsky, W.T Wetterling, *Numerical Recipes in FORTRAN 77: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1986-1992.



Vpliv reoloških lastnosti pri dvodimensijskem modeliranju drobirskih tokov

J. Sodnik¹, M. Četina² in M. Mikoš³

***Influence of rheological properties at two-dimensional
modelling of debris flows***

Povzetek. V prispevku je obravnavan vpliv reoloških lastnosti erozijskega drobirja pri dvodimensijskem modeliranju drobirskih tokov, ki jih običajno obravnavamo kot dvofazne neneutronske tekočine. Za matematično modeliranje smo uporabili komercialni program Flo-2D. Ta omogoča upoštevanje reoloških lastnosti simuliranega drobirskega toka z dvoparametrskim zakonom, kjer kot parametra nastopata kritična strižna trdnost in Binghamova viskoznost.

Abstract. This paper tackles the influence of debris rheological properties at two-dimensional modelling of debris flows that are usually addressed as non-Newtonian two-phase fluids. For mathematical modelling, we applied commercially available program Flo-2D. This program makes possible to take into account rheological properties of a simulated debris flow by a two-parameter quadratic law, where critical shear stress and Bingham viscosity are the main parameters.

1 Uvod

Modeliranje neneutronske tekočin v naravi, kot so snežni plazovi, gostotni tokovi ali drobirski tokovi, so vse bolj pogosta naloga gradbenih inženirjev, ki v sklopu preventivnega varstva pred naravnimi nevarnostmi določajo mesta izvorov teh nevarnosti ter s pomočjo matematičnega simuliranja teh nevarnih pojavov v prostoru določajo način in dinamiko gibanja in končno območja delovanja in umirjanja teh procesov. Glavni namen teh simulacij je določanje nevarnih območij za človeka in njegovo imetje (infrastrukturo). V zadnjih letih je zanimanje za modeliranje drobirskih tokov kot posebno nevarnega pojava (Mikoš,

¹ Vodnogospodarsko podjetje Kranj

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

³ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

2000/2001) postalno zanimivo tudi v Sloveniji. Za konkretno primere delovanja drobirskih tokov v Sloveniji kot npr. v Logu pod Mangartom (Hojnik et al., 2001; Četina, 2006; Fazarinc, 2006) in Koseču (Hojnik, 2004; Mikoš, 2006) so se uporabili različni eno- in dvodimensijski modeli. Lahko jih ločimo na tiste, kjer je matematični program razvoj domačega znanja (Katedra za mehaniko tekočin Fakultete za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani) ter na komercialni program Flo-2D, ki se v ZDA uradno uporablja kot orodje za modeliranje poplav in drobirskih tokov. V tem prispevku prikazujemo nekatere rezultate občutljivostne analize programa Flo-2D, ki smo ga v okviru dela na ciljnem raziskovalnem projektu »Ocena ogroženosti zaradi delovanja drobirskih tokov« uporabili za modeliranje potencialnih drobirskih tokov, ki bi se sprožili v hudourniških območjih Karavank v Zgornjesavski dolini in ogrozili hudourniške vršaje. Podrobnosti o delu na projektu so dostopne v končnem poročilu na spletu (CRP, 2009), rezultati občutljivostne analize z ozirom na natančnost zajemanja površja, po katerem se giblje drobirski tok, pa so prikazani drugje (Sodnik et al., 2009). Poudarek v tem prispevku je na reoloških lastnostih mešanice sedimenta in vode, torej dvofazne mešanice drobirskega toka na rezultate modeliranja njegovega gibanja, to je na globine in hitrosti toka ter na doseg drobirskega toka.

2 Opis modela Flo-2d

2.1 Osnovne enačbe modela Flo-2D

Flo-2d je kvazi dvodimensijski model, namenjen modeliranju gibanja vode in masnih tokov, med katere sodijo tudi drobirski tokovi. V osnovi je to »volume conservation model«, ki vodo ali masni tok premika po računski mreži, ki jo definira uporabnik in z njo zajame geometrijo terena, struge, objektov in ostalih geometrijskih parametrov terena. Račun gibanja tekočine poteka v dveh dimenzijah z integracijo osnovnih enačb in z ohranjanjem prostornine tekočine (FLO, 2006).

Osnovni enačbi modela sta kontinuitetna in dinamična enačba:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h V_x}{\partial x} = i \quad (1)$$

$$S_{fx} = S_{ox} - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{V_x}{g} \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{1}{g} \frac{\partial V_x}{\partial t} \quad (2)$$

pri čemer je h globina toka tekočine, V_x globinsko povprečena komponenta hitrosti, i intenziteta dežja [m/s] in S_{ox} naklon terena. S_{fx} je naklon energijske črte, ki je odvisen od Manningovega koeficiente hraptavosti in v primeru drobirskega toka tudi od reoloških lastnosti mešanice, kar je podrobnejše obravnavano v nadaljevanju v podpoglavlju 2.3.

2.2 Delovanje modela Flo-2D

Dinamična enačba (2) je izvrednotena tako, da je povprečna hitrost toka izračunana v računski celici za vsako izmed osmih glavnih smeri, ki so označene z geografskimi oznakami sever (S), J, V, Z, SV, SZ, JV in JZ, posebej. Hitrost je v vsaki smeri izračunana kot enodimensijska in to neodvisno do ostalih hitrosti. Za reševanje enačb program uporablja eksplisitno shemo končnih razlik. Stabilnost te eksplisitne sheme je zagotovljena s kriterijem

kontrole velikosti posameznega časovnega koraka v računu, ki mora zadostiti Courant-Friedrich-Lewy-jevemu (CFL) pogoju.

Za opis geometrije območja model uporablja mrežo poljubno velikih kvadratnih računskih celic. Uporabljena numerična shema je sicer relativno enostavna, vendar je zaradi zahtevanih kratkih časovnih korakov skupni računski čas pri uporabi gostejših numeričnih mrež lahko razmeroma dolg. Razmerje računskih časov (trajanje toka/računski čas) je bilo pri naših izračunih od 2:1 pri mreži 15 x 15 m do 1:240 pri mreži 5 x 5 m.

2.3 Modeliranje drobirskih tokov z modelom Flo-2D

Gibanje drobirskih tokov je odvisno od reoloških lastnosti mešanice, geometrije terena oz vršaja, naklona oz. padca terena in hrapavosti površine obravnavanega terena. Naklon energijske črte je izražen z enačbo:

$$S_{fx} = \frac{\tau}{\gamma_m h} + \frac{K\eta V_x}{8\gamma_m h^2} + \frac{(n_g V_x)^2}{h^{(4/3)}} \quad (3)$$

Mešanica je sestavljena iz vode in drobirja različnih frakcij. Količina oz. koncentracija materiala določa specifično težo mešanice γ_m , strižno odpornost τ in viskoznost mešanice η . Koncentracija materiala v mešanici je izražena z volumsko koncentracijo C_v , ki je izražena kot razmerje med prostornino drobirja in prostornino mešanice. Koncentracija C_v je pomembna, saj s tem podatkom na podlagi podatka o količini vode določamo tudi skupno magnitudo drobirskega toka. Poleg volumske koncentracije C_v so za model drobirskega toka v skladu z enačbo (3) potrebni še naslednji podatki:

- koeficient laminarnega odpora $K[-]$: koeficient odraža hrapavost površine, kjer se giba tok. Ta vrednost je pomembna za območja oz. faze, ko je tok laminaren ali prehoden.
- specifična teža drobirja γ_s [N/m^3]: podatek, pomemben za določanje specifične teže mešanice γ_m , ki je odvisna od specifične teže materiala in koncentracije le-tega
- strižna trdnost mešanice τ [$dynes/cm^2$]: model jo izračuna na podlagi volumske koncentracije C_v in koeficientov α in β , ki jih določi uporabnik. Vrednost τ je za izbrano koncentracijo C_v določena z izrazom: $\tau = \alpha * e^{\beta C_v}$.
- viskoznost mešanice η [poises]: η je v modelu, podobno kot τ , odvisna od volumske koncentracije C_v materiala v mešanici in koeficientov α in β . Vrednost η je določena z izrazom: $\eta = \alpha * e^{\beta C_v}$.

Avtor programa za koeficienta α in β podaja umerjene vrednosti teh koeficientov za različne primere drobirskih tokov po svetu (FLO, 2007).

3 Analiza vpliva različnih reoloških lastnosti

3.1 Potek analize

Na podlagi pridobljenih izkušenj lahko trdimo, da je izmed vseh parametrov modela najtežje določiti reološke lastnosti drobirskega toka, in sicer strižno trdnost τ in viskoznost η za določeno koncentracijo C_v . Ostale parametre modela je možno relativno dobro izbrati.

V okviru raziskave Ocena ogroženosti zaradi delovanja drobirskih tokov (CRP, 2009) so bile izvedene tudi geomehanske raziskave materiala, pridobljenega na sondažnih izkopih na

vršajih Trebiže, Presušnika, Bele in Suhlja. Cilj raziskave je bila določitev reoloških karakteristik mešanice potencialnega drobirskega toka, vendar so se naša pričakovanja izkazala za nerealna. Prvi in največji problem je ustrezna oprema za meritve karakteristik vzorcev, ki je v Sloveniji žal nimamo. Drug pomislek, ki se je pojavil med raziskavo je bil sledeč. Vsi vzorci, ki so bili odvzeti v izkopih, so bili odkladnine preteklih dogodkov, kar pomeni, da je material lahko že močno predelan in nima več karakteristik, ki jih je imel pred sprožitvijo oz. med gibanjem.

Za določanje reoloških oz. transportnih lastnosti potencialnih drobirskih tokov bi bilo potrebno odvzeti in analizirati vzorce materiala v zaledju hudournikov, na območju erozijskih žarišč in na ostalih potencialnih mestih proženja.

3.2 Modeli, uporabljeni v občutljivostni analizi

Izbrane so bile tri vrednosti volumske koncentracije C_v (0,40; 0,45 in 0,50), za katere so bile iz literature (FLO, 2007) izbrane minimalne in maksimalne vrednosti parametrov τ in η za izbrano koncentracijo C_v . Podatki v literaturi so povzeti na podlagi analize večjega števila drobirskih tokov. Cilj naše analize je bil dobiti mejne primere drobirskih tokov in ugotoviti, kakšne so posledice takih drobirskih tokov na vršaju, predvsem doseg in s tem območja nevarnosti. Z izbranimi podatki je bilo narejenih 12 kombinacij, s čimer so bile pokrite vse možne kombinacije parametrov τ in η . Analiza je bila izvedena na vršaju hudournika Bela. V nadaljevanju je podana tabela z odčitanimi maksimalnimi in minimalnimi vrednostmi τ in η za izbrane vrednosti volumske koncentracije C_v .

Preglednica 1: Mejne vrednosti reoloških parametrov pri izbranih C_v (FLO, 2007).

	Strižna trdnost τ (N/m^2)		Viskoznost η (Pas)	
	τ_{min}	τ_{max}	η_{min}	η_{max}
$C_v = 0,40$	2,6	170	0,63	27
$C_v = 0,45$	6,7	275	1,9	70
$C_v = 0,50$	18	800	5,4	185

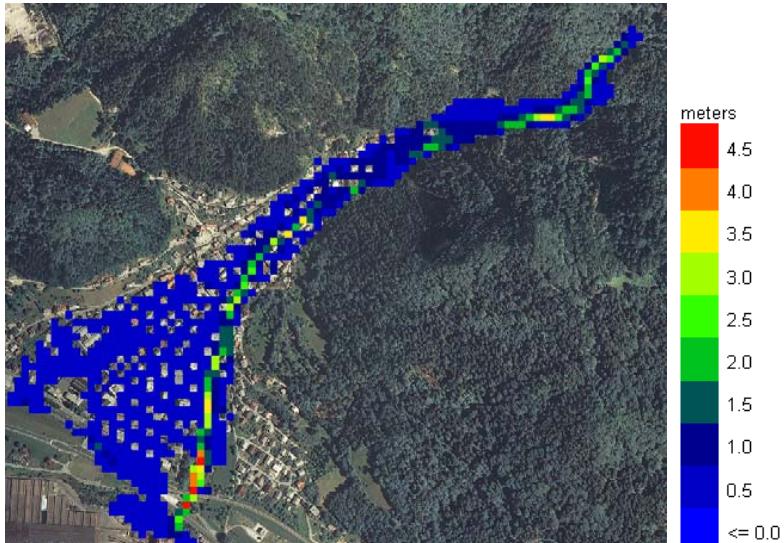
Kot je bilo že navedeno, je bilo z uporabo kombinacij zgornjih podatkov izdelanih 12 modelov, pri katerih so bile uporabljene vse možne kombinacije parametrov τ in η pri izbrani koncentraciji C_v . Za vsako vrednost C_v so bili izdelani štirje modeli.

Ostali parametri modelov so bili pri vseh primerih enaki in so predstavljeni v nadaljevanju. Računska celica mreže je bila velikosti 15m x 15m. Pozicija vhodnega hidrograma je bila pri vseh modelih enaka. Koeficient laminarne odpornosti K je bil 2285 (umerjena vrednost za drobirske tokove (FLO, 2007)), specifična teža sedimenta pa $27000\ N/m^3$. Vpliv hiš je bil zajet z blokiranimi celicami, Manningovi koeficienti n_g pa so bili za različne tipe površine sledeči: gozd 0,16; travnik 0,033; struga 0,13; področje med hišami $0,035\ sm^{(-1/3)}$.

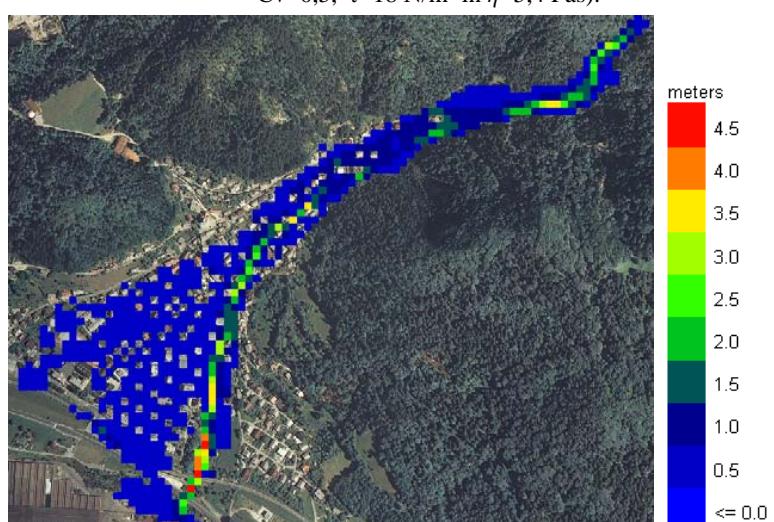
3.3 Rezultati analize

Pri analizi vpliva reologije se je pokazalo, da imajo reološki parametri relativno majhen vpliv na rezultate v primerjavi z ostalimi parametri. Vpliv izbranih kombinacij reoloških parametrov znatno izbrane vrednosti C_v je bil na modelih z mrežo 15x15 zanemarljivo majhen. Razlika v rezultatih je bila vidna samo med skupinami modelov z različnimi

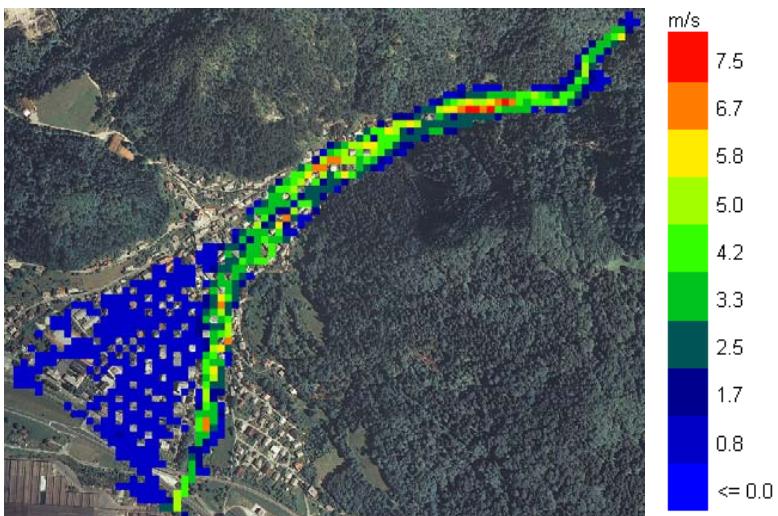
vrednostmi C_v , kar kaže na to, da ima magnituda dogodka večji vpliv na rezultate modela kot reološke karakteristike mešanice. V nadaljevanju so prikazani rezultati modelov z največjimi oz. najmanjšimi vrednostmi reoloških parametrov pri izbrani koncentraciji $C_v=0,5$. Iz slik 1 do 4 je razvidno, da je vpliv reoloških parametrov pri naših kombinacijah vrednosti zelo majhen. Ta majhen vpliv reologije na rezultate je razviden iz praktično enakih slik rezultatov globin in hitrosti za dva modela z zelo različnimi reološkimi parametri. Velika podobnost rezultatov se je pokazala tudi pri primerjavi globin v prečnem prerezu, izbranem v zgornjem delu vršaja, kjer so bile globine toka v izbranem prerezu praktično enake.



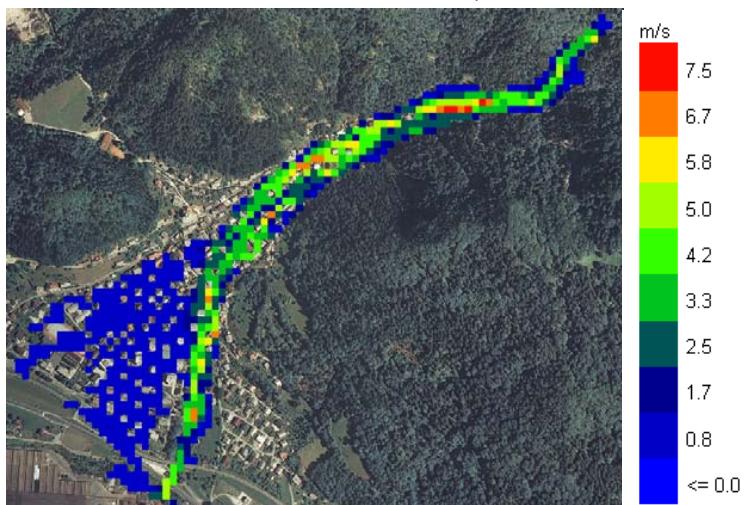
Slika 1: Maksimalne globine drobirskega toka pri modelu Bela21 (15x15, hidrogram Q_{100} , $C_v=0,5$, $\tau=18 \text{ N/m}^2$ in $\eta=5,4 \text{ Pas}$).



Slika 2: Maksimalne globine drobirskega toka pri modelu Bela22 (15x15, hidrogram Q_{100} , $C_v=0,5$, $\tau=800 \text{ N/m}^2$ in $\eta=185 \text{ Pas}$).



Slika 3: Maksimalne hitrosti drobirskega toka pri modelu Bela21 (15x15, hidrogram Q_{100} , $C_v=0,5$, $\tau=18 \text{ N/m}^2$ in $\eta=5,4 \text{ Pas}$).



Slika 4: Maksimalne hitrosti drobirskega toka pri modelu Bela22 (15x15, hidrogram Q_{100} , $C_v=0,5$, $\tau=800 \text{ N/m}^2$ in $\eta=185 \text{ Pas}$).

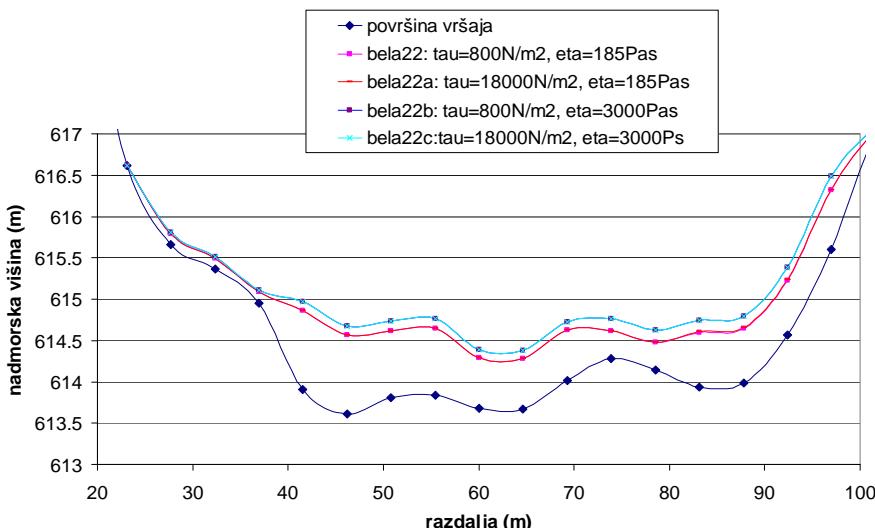
Zaradi pokazane neobčutljivosti naših modelov je bila izdelana še ena kombinacija modelov, kjer so bile razlike med reološkimi parametri večje oz. reda velikosti 10-20x. Uporabljeni reloški parametri niso realne vrednosti, namen te dodatne analize je bil samo pokazati (ne)občutljivost modela na različne reološke podatke, katere v prvem delu analize v okviru realnih vrednosti nismo uporabili. Vsi ostali parametri modelov so ostali enaki kot v prvem delu analize vpliva reoloških parametrov. V nadaljevanju je podana preglednica modelov z reološkimi karakteristikami modelov, ki so bile uporabljene.

Preglednica 2: Pregled modelov in reoloških podatkov modelov pri dodatni analizi modela

Ime modela	Hidrogram	Strižna trdnost τ (N/m ²)	Viskoznost η (Pas)
Bela22a	$Q_{100},(19h) C_v=0,5$	18000	185
Bela22b	$Q_{100},(19h) C_v=0,5$	800	3000
Bela22c	$Q_{100},(19h) C_v=0,5$	18000	3000

Pri zgoraj navedenih kombinacijah pa je bil vpliv reoloških karakteristik mešanice drugačen. Pri analizi rezultatov se je izkazalo, da ima vpliv na rezultate viskoznost η , medtem ko je vpliv strižne trdnosti τ pri naših modelih zanemarljiv oz. neopazen. To se je pokazalo tako, da je pri modelu Bela22a, kjer je bila v primerjavi z modelom Bela22 ($\tau=800 \text{ N/m}^2$ in $\eta=185 \text{ Pas}$) spremenjena samo strižna trdnost τ , slika globin in hitrosti ostala praktično nespremenjena. Pri modelu Bela22b, kjer pa je bila spremenjena viskoznost η , pa so bile opazne manjše spremembe (maksimalna globina iz 4,3 m na 4,4 m) pri globinah toka, nekoliko večje (maksimalna hitrost iz 7 m/s na 5,8 m/s) pa pri hitrostih toka. Razlike med modeloma Bela22b in Bela22c zaradi spremembe strižne trdnosti τ ni. Na sliki 5 je prikazana primerjava gladin v prečnem prerezu P1, izbranem v zgornjem delu vršaja.

Bela - P1 (Q100, Cv=0.5)



Slika 5: Prečni prerez P1 – primerjava gladin z modelov z različnimi reološkimi parametri.

V izbranem prečnem prerezu P1 na sliki 5 se vidi razlika med gladinami obravnavanih modelov. V tem prikazu se vidi, da na gladine pri modelu z mrežo 15 m x 15 m vidno vpliva samo viskoznost η . Zato sta gladini po dveh modelov z isto viskoznostjo η in različno strižno trdnostjo τ praktično enaki.

4 Zaključki

Občutljivostne analize matematičnega modela drobirskega toka, ki smo jo opravili na izbranih hudourniških vršajih v Karavankah v dolini reke Save Dolinke, kažejo na to, da so reološki parametri (mejna strižna trdnost, viskoznost) sicer relevantni parametri modeliranja gibanja drobirskega toka, vendar z omejenim vplivom na končne rezultate modeliranja - predvsem na doseg drobirskega toka, pa tudi na globine in hitrosti toka. Mnogo bolj pomembni parametri so vhodni podatki, predvsem sama magnituda drobirskega toka, ki je povezana z razpoložljivo količino vode v mešanici drobirja in vode, kakor tudi topografija in hrapavost površja, po katerem teče drobirski tok. Z zamudnim zbiranjem podatkov o reoloških lastnostih lahko pridobimo manj pri natančnosti modeliranja, kakor lahko zgubimo z napačno oceno magnitudo potencialnega drobirskega toka.

V tem smislu lahko za območja, na katerih terenski ogledi in poznavanje geoloških razmer kažejo na možnost sprožitve drobirskega toka, relativno dobro ocenimo območja nevarnosti s pomočjo matematičnega modeliranja drobirskega toka. Vseeno priporočamo uporabo matematičnega modeliranja le ob dobrem poznavanju terena in ob jasno zastavljenem cilju modeliranja, ki ne sme biti samo sebi namen.

Literatura

- [1] CRP, *Ocena ogroženosti zaradi delovanja drobirskih tokov*, Uprava RS za zaščito in reševanje, Ministrstvo za obrambo RS, Ljubljana. Internet: http://www.sos112.si/slo/tdocs/naloga_76.pdf (6. 6. 2009)
- [2] M. Četina, R. Rajar, T. Hojnik, M. Zakrajšek, M. Krzyk, M. Mikoš, *Case study: Numerical simulations of debris flow below Stože, Slovenia*, J. Hydr. Eng. 132(2), 121--130, 2006.
- [3] R. Fazarinc, B. Majes, M. Mikoš, *Using results of mathematical modeling of debris flows for optimization of a river channel form to convey debris flows and floods*, Int. Conf. on Fluvial Hydraulics River Flow 2006, Lisboa, Portugal, Balkema, 2006.
- [4] FLO, *FLO-2D, User's Manual, Version 2006.01*, Flo-2d Software, Inc., 2006.
- [5] FLO, *FLO-2D, User's Manual, Version 2007.06*, Flo-2d Software, Inc., 2007.
- [6] T. Hojnik, *Dvodimensijski matematični model drobirskih tokov na območju Koseča z oceno ogroženosti naselja Koseč zaradi njihovega delovanja*, 15. Mišičev vodarski dan 2004, Maribor, 247--251, 2004.
- [7] T. Hojnik, M. Četina, M. Krzyk, R. Rajar, *2D model drobirskega toka na območju Zgornjega in Spodnjega Loga*. 12. Mišičev vodarski dan 2001, Maribor, 84--91, 2001.
- [8] M. Mikoš, *Značilnosti drobirskih tokov (Characteristics of debris flows)*, Ujma 14/15, 295--299, 2000/2001.
- [9] M. Mikoš, B. Majes, R. Fazarinc, R. Rajar, D. Žagar, M. Krzyk, T. Hojnik, M. Četina, *Numerical simulation of debris flows triggered from the Strug rock fall source area, W Slovenia*, *Natural Hazards and Earth System Sciences* 6(2), 261--270, 2006.
- [10] J. Sodnik, M. Mikoš, *Estimation of magnitudes of debris flows in selected torrential watersheds in Slovenia = Ocena magnitud drobirskih tokov v izbranih hudourniških območjih v Sloveniji*, Acta geogr. Slov. 46-1, 93--123, 2006.
- [11] J. Sodnik, U. Petje, M. Mikoš, *Terrain topography and debris-flow modelling = Topografija površja in modeliranje gibanja drobirskih tokov*, Geod. vest. 53(2), 271--297, 2009.



Raziskava dinamike udarnih sistemov z metodo harmonskega ravnovesja

R.Pušenjak¹ in M.Oblak²

Jerk Dynamics Researches by Harmonic Balance Method

Povzetek. V članku so predstavljene periodične rešitve nelinearnih udarnih dinamičnih sistemov, katerih vodilne enačbe vsebujejo časovne odvode tretjega reda, ki so dobljene z uporabo metode harmonskega ravnovesja (MHR). Za konstrukcijo natančnih analitičnih rešitev višjega reda je MHR prilagojena tako, da lahko poljubno povečujemo število vključenih harmoničnih členov. Uporabnost in učinkovitost predložene metode je prikazana v obravnavi dveh različnih tipov enačb udarnih sistemov.

Abstract. Periodic solutions of nonlinear jerk dynamical systems, whose governing equations involve third order time-derivative are presented by applying harmonic balance (HB) method. To construct accurate higher order analytical solutions, the HB method is adapted so that additional harmonic terms can be arbitrarily added. The usefulness and effectiveness of the proposed method is illustrated on two different types of jerk equations.

1 Uvod

Obstoj periodičnih rešitev nelinearnih enačb udarnih sistemov $u''' = f(u, u', u'')$, ki vsebujejo tretje časovne odvode pomikov se pojavi v določenem področju vrednosti parametrov [1]. Nelinearni avtonomni sistemi tretjega reda se lahko obnašajo regularno na različne načine. Periodična nihanja, ki jih izvajajo, lahko pripadajo centrom, limitnim ciklom, svitkom (torusom) itd. Če parametri ne ustrezajo določenemu področju, se sistem lahko vede tudi kaotično [2]. Ti pojavi so izvali številne avtorje k analitičnemu proučevanju narave periodičnih rešitev, pri čemer je v primeru ustreznih omejitev veliko pozornost pritegnila metoda harmonskega ravnovesja (MHR). Le-ta je doživela precejšen razvoj od uporabe rešitev najnižjega reda do višje-rednih rešitev. Vodilne enačbe udarnih sistemov, ki jih lahko

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

² Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

rešujemo z MHR spadajo v razred invariantnih problemov s časovno refleksijo in lastnostjo prostorske parnosti, kar pomeni, da imajo vsi členi lastnost zrcaljenja pri zamenjavi časovne osi $t \rightarrow -t$ in prostorske osi $u \rightarrow -u$. Tem zahtevam ustrezajo enačbe udarnih sistemov, ki imajo ničelni začetni pomik ($u(0)=0$) in ničelni začetni pospešek ($\dot{u}(0)=0$) ter od nič različno začetno hitrost ($\ddot{u}(0)=B$). V tem članku bomo MHR dopolnili z Newton-Raphsonovim iterativnim postopkom, ki omogoča izračun višjerednih rešitev z dodajanjem prirastkov nižjeredni rešitvi, pri čemer lahko s prirastkom (kvadrata) krožne frekvence udarnega nihanja izračunamo zaporedne boljše približke krožne frekvence, v prirastkih pomikov pa upoštevamo dodatne višjeredne harmonske člene, ki omogočajo izračun natančnejših rešitev tudi za pomike same.

2 Metoda harmonskega ravnoesja (MHR) pri prvem tipu enačbe udarnih sistemov

Udarni dinamični sistem, ki je neobčutljiv za spremembo smeri časovne kot tudi prostorske koordinate in vsebuje le kubične nelinearnosti zapišemo v splošni obliki s pomočjo enačbe:

$$u''' = -\gamma u' - \alpha(u')^3 - \beta u^2(u') + \lambda u u' u'' - \varepsilon u'(u'')^2 \quad (1)$$

kjer so $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ in ε kontrolni parametri, ki jih običajno jemljemo konstantne. Začetni pogoji, ki omogočajo časovno in prostorsko obrnljivost so:

$$u(0)=0, \quad u'(0)=B, \quad u''(0)=0 \quad (2)$$

Vsaj eden izmed parametrov β, δ in ε mora biti od nič različen in če je $\varepsilon=0$, zahtevamo še, da je $\lambda \neq -2\alpha$, sicer se vodilna enačba udarnega sistema izrodi v enačbo, ki je le še časovni odvod enačbe pospeška.

V MHR bomo v tem članku kot novo neodvisno spremenljivko uvedli brezdimenzijski čas $\tau = \omega t$, kot novo odvisno spremenljivko pa spremenljivko $y = \omega u$. Če poleg tega uvedemo še zamenjavo $\Omega = \omega^2$, lahko enačbi (1) in (2) prevedemo na obliko:

$$\Omega^2 \left(\ddot{y} + \varepsilon \dot{y} \dot{y}^2 \right) + \Omega \left[\gamma \dot{y} + \alpha(\dot{y})^3 - \lambda y \dot{y} \ddot{y} \right] + \beta y^2 \dot{y} = 0 \quad (3.a)$$

$$y(0)=0, \quad \dot{y}(0)=B, \quad \ddot{y}(0)=0 \quad (3.b)$$

Z uvedbo nove neodvisne spremenljivke je rešitev enačbe (3.a) periodična funkcija $\tau = \omega t$ s periodo 2π in pripadajočim nihajnim časom $T = 2\pi/\sqrt{\Omega}$.

Za konstrukcijo višjerednih periodičnih rešitev uporabimo v MHR Newton-Raphsonov iterativni postopek [3]. Če uspemo najti neko rešitev, ki definira začetno stanje, lahko z dodajanjem majhnih prirastkov:

$$(\Omega + \Delta\Omega)^2 \left[(\ddot{y} + \Delta\ddot{y}) + \varepsilon (\dot{y} + \Delta\dot{y})(\dot{y} + \Delta\dot{y})^2 \right] + (\Omega + \Delta\Omega) \left[\gamma (\dot{y} + \Delta\dot{y}) + \alpha (\dot{y} + \Delta\dot{y})^3 - \lambda (y + \Delta y)(\dot{y} + \Delta\dot{y})(\dot{y} + \Delta\dot{y}) \right] + \beta (y + \Delta y)^2 (\dot{y} + \Delta\dot{y}) = 0$$

v iterativnem postopku najdemo sosednjo rešitev. Pri tem sosednjo rešitev razvijemo v Taylorjevo vrsto in obdržimo le člene, ki so v prirastkih linearni:

$$\begin{aligned} \Omega^2 \Delta \ddot{y} + (2\Omega^2 \varepsilon \dot{y} \ddot{y} - \Omega \lambda y \dot{y}) \Delta \dot{y} + (\Omega^2 \varepsilon \dot{y}^2 + \Omega \gamma + 3\Omega \alpha \dot{y}^2 + \beta y^2 - \Omega \lambda y \ddot{y}) \Delta \dot{y} + \\ (2\beta y \dot{y} - \Omega \lambda y \ddot{y}) \Delta y = - \left[\Omega^2 (\ddot{y} + \varepsilon \dot{y} \ddot{y}^2) + \Omega (\gamma \dot{y} + \alpha \dot{y}^3 - \lambda y \dot{y} \ddot{y}) + \beta y^2 \dot{y} \right] - \\ \left[2\Omega (\ddot{y} + \varepsilon \dot{y} \ddot{y}^2) + \gamma \dot{y} + \alpha \dot{y}^3 - \lambda y \dot{y} \ddot{y} \right] \Delta \Omega \end{aligned} \quad (4)$$

Ker nas zanimajo periodične rešitve, jih izrazimo z okrnjeno Fourierjevo vrsto:

$$y(\tau) = \sum_{k=1}^N a_k \sin[(2k-1)\tau] = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}, \quad \Delta y(\tau) = \sum_{k=1}^N \Delta a_k \sin[(2k-1)\tau] = \mathbf{T} \cdot \Delta \mathbf{a} \quad (5.a,b)$$

ki avtomatično izpolnjuje začetne pogoje:

$$y(0) = \Delta y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = \Delta \dot{y}(0) = 0, \quad (6.a,b)$$

ne izpolnjuje pa avtomatično začetnega pogoja $\dot{y}(0) = B$. Ta pogoj bo izpolnjen, če zahtevamo $\Delta \dot{y}(0) = 0$. Iz enačbe $\Delta \dot{y}(\tau) = \sum_{k=1}^N (2k-1) \Delta a_k \cos[(2k-1)\tau] = \dot{\mathbf{T}} \cdot \Delta \mathbf{a}$ dobimo zvezo:

$$\Delta \dot{y}(0) = \sum_{k=1}^N (2k-1) \Delta a_k = \dot{\mathbf{T}}(0) \cdot \Delta \mathbf{a} = 0 \quad (7)$$

V enačbah (5.a,b) je \mathbf{T} $1 \times N$ matrika sinusnih funkcij, $\mathbf{a}, \Delta \mathbf{a}$ pa sta stolpna vektorja Fourierjevih koeficientov oziroma prirastkov Fourierjevih koeficientov:

$$\mathbf{T} = [\sin \tau, \sin 3\tau, \dots, \sin (2N-1)\tau], \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)^T, \quad \Delta \mathbf{a} = (\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_N)^T \quad (8)$$

S pomočjo nastavkov (5.a,b) si pripravimo še druge in tretje odvode:

$$\begin{aligned} \ddot{y}(\tau) &= - \sum_{k=1}^N (2k-1)^2 a_k \sin[(2k-1)\tau] = \ddot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{a}, \\ \Delta \ddot{y}(\tau) &= - \sum_{k=1}^N (2k-1)^2 \Delta a_k \sin[(2k-1)\tau] = \ddot{\mathbf{T}} \cdot \Delta \mathbf{a} \end{aligned} \quad (9.a,b)$$

$$\ddot{y}(\tau) = -\sum_{k=1}^N (2k-1)^3 a_k \cos[(2k-1)\tau] = \ddot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{a},$$

$$\Delta \ddot{y}(\tau) = -\sum_{k=1}^N (2k-1)^3 \Delta a_k \sin[(2k-1)\tau] = \ddot{\mathbf{T}} \cdot \Delta \mathbf{a}$$
(10.a,b)

Pričnimo postopek z izračunom prve aproksimacije, ki vsebuje le en harmonski člen ($N=1$). Ker iščemo eksaktno rešitev, so $\Delta \ddot{y} = \Delta \dot{y} = \Delta y = 0$; $\Delta \Omega = 0$, kar pomeni da rešujemo prvotno enačbo (3.a). Če nastavek (5.a), skrčen na en sam člen: $y(\tau) = a_1 \sin \tau = B \sin \tau$ s pripadajočimi odvodi vstavimo v enačbo (3.a) ter člene pri $\cos \tau$ izenačimo z nič, dobimo enačbo:

$$\Omega^2 \left(1 - \frac{1}{4} \varepsilon B^2 \right) - \Omega \left(\gamma + \frac{1}{4} \lambda B^2 + \frac{3}{4} \alpha B^2 \right) - \frac{1}{4} \beta B^2 = 0 \quad (11)$$

S pozitivnim korenom zgornje enačbe $\left(\frac{1}{4} \varepsilon B^2 < 1 \right)$ dobimo prvi približek kvadrata krožne frekvence udarnega nihanja Ω_I :

$$\Omega_I = \frac{\left(\gamma + \frac{1}{4} \lambda B^2 + \frac{3}{4} \alpha B^2 \right) + \sqrt{\left(\gamma + \frac{1}{4} \lambda B^2 + \frac{3}{4} \alpha B^2 \right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4} \varepsilon B^2 \right) \beta B^2}}{2 \left(1 - \frac{1}{4} \varepsilon B^2 \right)} \quad (12)$$

Nadalujmo postopek z izračunom druge aproksimacije, v kateri upoševamo dva harmonska člena ($N = 2$). Nastavek rešitve vzamemo po enačbi (5.a) v obliki:

$$y(\tau) = a_1 \sin \tau + a_2 \sin 3\tau = B \sin \tau + 0 \sin 3\tau = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a},$$

$$\mathbf{T} = [\sin \tau, \sin 3\tau], \quad \mathbf{a} = [a_1, a_2]^T = [B, 0]^T \quad (13.a,b)$$

Pravkar dobljeno vrednost Ω_I uporabimo za začetni približek druge aproksimacije kvadrata krožne frekvence udarnega nihanja, ki jo izrazimo v obliki: $\Omega_2 = \Omega_I + \Delta \Omega_I$. Z uporabo enačbe (7) dobimo zvezko: $\Delta \dot{y}(0) = \Delta a_1 + 3 \Delta a_2 = 0$. S pomočjo zamenjave $\Delta a_2 = -\frac{a_1}{3}$ v enačbi (5.b) izrazimo $\Delta y(\tau)$ z:

$$\Delta y(\tau) = \Delta a_1 \sin \tau + \Delta a_2 \sin 3\tau = \Delta a_1 \left(\sin \tau - \frac{1}{3} \sin 3\tau \right), \quad (14)$$

pripadajoče odvode pa z:

$$\Delta \dot{y}(\tau) = \Delta a_1 \cos \tau + 3 \Delta a_2 \cos 3\tau = \Delta a_1 (\cos \tau - \cos 3\tau)$$

$$\Delta \ddot{y}(\tau) = -\Delta a_1 \sin \tau - 9 \Delta a_2 \sin 3\tau = -\Delta a_1 (\sin \tau - 3 \sin 3\tau) \quad (15.a,b,c)$$

$$\Delta \ddot{y}(\tau) = -\Delta a_1 \cos \tau - 27 \Delta a_2 \cos 3\tau = -\Delta a_1 (\cos \tau - 9 \cos 3\tau)$$

Z uvrstitvijo enačb (13.a), (14) in (15.a,b,c) v enačbo (4), z upoštevanjem približka Ω_l ter izenačenjem izrazov ob $\cos \tau$ in $\cos 3\tau$ z nič dobimo enačbi:

$$\begin{aligned} & \left(-\Omega_l^2 + \frac{3}{2}\Omega_l\alpha B^2 + \frac{5}{6}\beta B^2 + \Omega_l\gamma - \frac{1}{2}\Omega_l^2\varepsilon B^2 + \frac{1}{6}\Omega_l\lambda B^2 \right) \Delta a_l + \\ & \left(-2\Omega_l B + \frac{3}{4}\alpha B^3 + \gamma B + \frac{1}{2}\Omega_l\varepsilon B^3 + \frac{1}{4}\lambda B^3 \right) \Delta \Omega_l = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \left(9\Omega_l^2 - \frac{3}{4}\Omega_l\alpha B^2 - \frac{5}{4}\beta B^2 - \Omega_l\gamma - \frac{5}{4}\Omega_l^2\varepsilon B^2 - \frac{5}{4}\Omega_l\lambda B^2 \right) \Delta a_l + \\ & \left(\frac{1}{4}\alpha B^3 - \frac{1}{2}\Omega_l\varepsilon B^3 - \frac{1}{4}\lambda B^3 \right) \Delta \Omega_l = -\frac{1}{4}\Omega_l\alpha B^3 + \frac{1}{4}\beta B^3 + \frac{1}{4}\Omega_l^2\varepsilon B^3 + \frac{1}{4}\Omega_l\lambda B^3 \end{aligned} \quad (17)$$

Če vpeljemo funkcije:

$$\begin{aligned} f_1(\Omega_l, B) &= -\Omega_l^2 + \frac{3}{2}\Omega_l\alpha B^2 + \frac{5}{6}\beta B^2 + \Omega_l\gamma - \frac{1}{2}\Omega_l^2\varepsilon B^2 + \frac{1}{6}\Omega_l\lambda B^2 \\ f_2(\Omega_l, B) &= -2\Omega_l B + \frac{3}{4}\alpha B^3 + \gamma B + \frac{1}{2}\Omega_l\varepsilon B^3 + \frac{1}{4}\lambda B^3 \\ f_3(\Omega_l, B) &= 9\Omega_l^2 - \frac{3}{4}\Omega_l\alpha B^2 - \frac{5}{4}\beta B^2 - \Omega_l\gamma - \frac{5}{4}\Omega_l^2\varepsilon B^2 - \frac{5}{4}\Omega_l\lambda B^2 \\ f_4(\Omega_l, B) &= \frac{1}{4}\alpha B^3 - \frac{1}{2}\Omega_l\varepsilon B^3 - \frac{1}{4}\lambda B^3 \\ f_5(\Omega_l, B) &= -\frac{1}{4}\Omega_l\alpha B^3 + \frac{1}{4}\beta B^3 + \frac{1}{4}\Omega_l^2\varepsilon B^3 + \frac{1}{4}\Omega_l\lambda B^3 \end{aligned} \quad (18)$$

lahko razrešimo enačbe (16,17) na Δa_l in $\Delta \Omega_l$ v obliki:

$$\Delta a_l = \frac{f_2 f_5}{f_2 f_3 - f_1 f_4}, \quad \Delta \Omega_l = \frac{f_1 f_5}{f_1 f_4 - f_2 f_3} \quad (19.a,b)$$

Drugo aproksimacijo kvadrata krožne frekvence $\Omega_2 = \Omega_l + \Delta \Omega_l$ sedaj lahko izračunamo s pomočjo enačb (12) in (19.b), novo rešitev za pomike pa z uporabo enačbe (19.a):

$$y^{nov}(\tau) = y(\tau) + \Delta y(\tau) = B \sin \tau + \Delta a_l \left(\sin \tau - \frac{1}{3} \sin 3\tau \right) \quad (20)$$

Tretjo in vse nadaljnje višeredne aproksimacije izračunamo podobno kot je prikazano v izračunu druge aproksimacije.

3. Uporaba MHR pri drugem tipu enačbe udarnih sistemov

Drugi tip enačbe udarnih sistemov [4]:

$$u''' = (\alpha - 1)u' - (u')^3 + u''(u + u'')/u' \quad (21)$$

vsebuje linearni člen s hitrostjo u' , člen s kubično nelinearnostjo $(u')^3$ v hitrostih in nelinearni ulomljeni člen, ki vsebuje pomike, hitrosti in pospeške. Enačba je invariantna glede na obrnjeni čas in invariantna glede parnosti. Pomembna pa je zaradi pojava, da pri ustrezni začetni hitrosti $u'(0) = B$ svitek (torus) v faznem prostoru degenerira v limitni cikel. Limitnemu ciklu pripada periodična rešitev, ki jo lahko izračunamo z uporabo MHR. Začetne pogoje vzamemo v enaki obliki kot za enačbo (1), le da mora $u'(0) = B$ zavzeti natančno določeno vrednost. Enačbo najprej množimo z u' :

$$u'u''' - (\alpha - 1)(u')^2 + (u')^4 - u''(u + u'') = 0 \quad (22)$$

da se znebimo ulomljenega dela. Z uvedbo brezdimenzijskega časa $\tau = \omega t$ in nove odvisne spremenljivke $y = \omega u$ enačbo prevedemo na obliko:

$$\omega^2 \ddot{y} - (\alpha - 1) \dot{y}^2 + \dot{y}^4 - \dot{y}(y + \omega^2 \ddot{y}) = 0 \quad (23)$$

Za konstrukcijo višjerednih rešitev uporabimo Newton-Raphsonov iterativni postopek, v katerem iščemo sosednjo rešitev z reševanjem linearizirane enačbe na posamezne prirastke:

$$\begin{aligned} & \omega^2 \dot{y} \Delta \ddot{y} - (\omega^2 \dot{y} + y + \omega^2 \ddot{y}) \Delta \dot{y} + (\omega^2 \ddot{y} - 2(\alpha - 1) \dot{y} + 4 \dot{y}^3) \Delta \dot{y} - \dot{y} \Delta y + 2\omega \ddot{y} \Delta \omega = \\ & -\omega^2 \ddot{y} + (\alpha - 1) \dot{y}^2 - \dot{y}^4 + y \ddot{y} + \omega^2 \dot{y}^2 \end{aligned} \quad (24)$$

Prvo aproksimacijo izračunamo tudi v tem primeru z nastavkom $y(\tau) = a_1 \sin \tau = B \sin \tau$, ki vsebuje le en harmonični člen. Vstavljanje v enačbo (23) in izenačitev konstantnih členov z nič nam da enačbo:

$$\frac{1}{8} (8B^2 + 3B^4 - 4B^2\alpha - 8B^2\omega^2) = 0 \quad (25)$$

iz katere določimo vrednost prvega približka krožne frekvence udarnega nihanja :

$$\omega_I = \sqrt{1 - \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{8}B^2} \quad (26)$$

Izračun druge aproksimacije se odvija povsem analogno kot je bilo predstavljeno pri prvem tipu enačbe udarnih sistemov. Nastavek rešitve je določen z enačbama (13.a,b) in tudi enačbe (14),(15.a,b,c) veljajo še naprej v nespremenjeni obliki. Uvrstitev enačb (13.a),(14) in (15.a,b,c) v enačbo (24) ter izenačitev konstantnih členov oziroma členov pri $\cos 2\tau$ z nič nam da enačbi:

$$\begin{aligned} & (-2\omega_I^2 B - \alpha B + 2B + B^3) \Delta a_I - \omega_I B^2 \Delta \omega_I = \\ & -\frac{3}{8} B^4 + \omega_I^2 B^2 + \frac{1}{2} \alpha B^2 - B^2 = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \left(8\omega_I^2 B + \frac{1}{2}B^3 - \frac{8}{3}B\right)\Delta a_I - \omega_I B^2 \Delta \omega_I = \\ -\frac{1}{2}B^4 + \frac{1}{2}\left(\omega_I^2 B^2 + \alpha B^2 - B^2 - \omega_I^2 B^2 + B^2\right) = -\frac{1}{2}B^4 + \frac{1}{2}\alpha B^2 \end{aligned} \quad (28)$$

V tem primeru lahko enačbi (27,28) eksplicitno razrešimo na Δa_I in $\Delta \omega_I$ v obliki:

$$\Delta a_I = \frac{3(\alpha B - B^3)}{(60\omega_I^2 + 6\alpha - 3B^2 - 28)} \quad (29)$$

$$\Delta \omega_I = \frac{3\left[\left(B^2 + 2\right)B^2 + \alpha\left(\alpha - 2B^2 - 2\right) + 2\left(\alpha - B^2\right)\omega_I^2\right]}{\omega_I\left(60\omega_I^2 + 6\alpha - 3B^2 - 28\right)} \quad (30)$$

Za drugo aproksimacijo krožne frekvence $\omega_2 = \omega_I + \Delta \omega_I$ dobimo sedaj izraz:

$$\omega_2 = \omega_I + \frac{3\left[\left(B^2 + 2\right)B^2 + \alpha\left(\alpha - 2B^2 - 2\right) + 2\left(\alpha - B^2\right)\omega_I^2\right]}{\omega_I\left(60\omega_I^2 + 6\alpha - 3B^2 - 28\right)} \quad (31)$$

novo rešitev za pomike pa lahko v tem primeru izrazimo v obliki :

$$y^{nov}(\tau) = y(\tau) + \Delta y(\tau) = B \sin \tau + \frac{3(\alpha B - B^3)}{(60\omega_I^2 + 6\alpha - 3B^2 - 28)} \left(\sin \tau - \frac{1}{3} \sin 3\tau\right) \quad (32)$$

Tretjo in vse nadaljnje višjeredne aproksimacije izračunamo s ponavljanjem Newton-Raphsonovega postopka podobno kot je prikazano v izračunu druge aproksimacije.

4 Rezultati

Kot je že bilo omenjeno, svitek (torus) pri drugem tipu enačbe udarnih sistemov degenerira v limitni cikel, ko začetna hitrost $\dot{y}(0) = B$ zavzame natanko določeno vrednost. Te vrednosti ne moremo določiti z MHR, temveč z drugimi metodami, najpreprosteje tako, da izvedemo numerično integracijo enačbe udarnih sistemov pri različnih vrednostih B in opazujemo degeneracijo svitka v fazni ravnini. Ko svitek preide v limitni cikel, je dobljena ustrezna vrednost začetne hitrosti B . V spodnji tabeli so prikazani rezultati izračuna za prvo in drugo aproksimacijo rešitve enačbe udarnih sistemov v odvisnosti od različnih vrednosti prostega parametra α ter pripadajoče numerično določene vrednosti začetne hitrosti B . Kot rezultat izračuna se v tabeli pojavi ljeta prvi in drugi približek krožne frekvence in drugi približek amplitude nihanja (enačba (32)).

Tabela 1. Prva in druga aproksimacija krožne frekvence in amplitude udarnega nihanja za degenerirani torus po MHR

α	B	ω_1	ω_2	A_2
0.1	0.451	0.978584	0.98061	0.444665
0.2	0.644	0.964938	0.973397	0.624118
0.5	1.047	0.977517	1.02068	0.961029
1.0	1.550	1.18361	1.22254	1.39146

5 Zaključek

V članku je prikazano analitično reševanje dveh tipov enačb udarnih sistemov z MHR, ki je dopolnjena z Newton-Raphsonovim iterativnim postopkom tako, da omogoča uspešno tvorbo višjerednih rešitev. Rezultati aproksimacije drugega reda so prikazani pri tipu enačbe udarnega sistema z ulomljениm nelinearnim členom, pri katerem nastopi degeneracija svitka v limitni cikel v faznem prostoru pri določeni vrednosti začetne hitrosti.

Zahvala

Delo je nastalo v okviru raziskovalnega programa programske skupine P2-0137 Numerična in eksperimentalna analiza nelinearnih mehanskih sistemov, ki ga sofinancira MVŠZT Republike Slovenije.

Literatura

- [1] Gottlieb, H.P.W. (2004) *Harmonic balance approach to periodic solutions of non-linear jerk equations*. Journal of Sound and Vibration; **271**; 671-683.
- [2] Sprott, J.C. *Chaos and Time-Series Analysis*, Oxford University Press, New York, 2003.
- [3] Pušenjak, R., Oblak, M. (2004) *Incremental harmonic balance method with multiple time variables for dynamical systems with cubic non-linearities*. Int. j. numer. methods eng., Vol. **59**, No. 2, 255-292.
- [4] Posch, H.A., Hoover, W.G., Vesely, F.J. (1986) *Canonical dynamics of the Nose oscillator: stability, order, and chaos*. Physical Review A; **33**; 4253-4265.



Prostorski nosilci in kvaternionska parametrizacija rotacij

E. Zupan¹, M. Saje² in D. Zupan³

Three dimensional beams and the quaternion parametrization of rotations

Povzetek. Predstavljene so enačbe prostorskih nosilcev po Reissnerju z vektorsko in kvaternionsko parametrizacijo rotacij. Opisan je numeričen način reševanja enačb, ki temeljijo na uporabi rotacijskih kvaternionov. Metoda je verificirana z računskimi primeri iz literature.

Abstract. The equations of Reissner's three-dimensional beam theory are presented applying the rotational vector and, as the alternative, the quaternion parametrization of rotations. The numerical solution of the equations based on rotational quaternion is presented. The method is tested on the numerical examples from literature.

1 Uvod

V zadnjih desetletjih se je v mehaniki uporaba prostorskih nosilcev zelo razvila. Z razvojem natančnejših metod pa so se pojavile tudi težave. Pri prostorskih nosilcih po Reissnerju, kjer uporabljamo točne zveze med kinematičnimi in deformacijskimi količinami, predstavljajo največjo težavo prostorske rotacije, ki v različnih parametrizacijah pomenijo uporabo zahtevnih matematičnih struktur. Najbolj znana je uporaba rotacijskega vektorja, to je triparametrična parametrizacija rotacije, kjer smer rotacijskega vektorja določa os rotacije, njegova velikost (norma) pa velikost kota rotacije. Znano je, da rotacijski vektorji tvorijo nekomutativno množljivkovno skupino ter da je rotacijski operator v nelinearni povezavi z rotacijskim vektorjem (Rodriguesova formula, glej [11]). Z izbiro kvaternionske parametrizacije rotacij se izognemo linearizaciji nelinearnih operatorjev. Izgine tudi dvojnost operator-parametrizacija, saj nam rotacijski kvaternion predstavlja oboje. Za razliko od končnih elementov, ki uporabljajo vektorsko parametrizacijo rotacije, na primer [1], [2], [3], [4], [7], je kvaternionsko osnovan končni element na pomikih in zasukih brez izbiре posebne interpolacije objektiven v smislu, kot sta ga

¹ Veplas d.d., Velenje

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

³ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

definirala Jelenič in Crisfield [3]. Z izbiro kolokacije za numerično reševanje enačb na šibki obliki konsistentnih enačb za notranje enačbe in analitične integracije nekaterih členov v robnih enačbah se popolnoma izognemo tudi problemom blokiranja.

2 Osnove kvaternionskega opisa rotacij

Ker smo že na Kuhljevih dnevih 2008 [9] podrobno poročali o kvaternionski parametrizaciji rotacij, le na kratko obnovimo osnovne povezave med splošno rotacijo in rotacijskim kvaternonom.

Naj bo $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ fiksna baza trirazsežnega prostora. Rotacijo okoli osi, določeno z enotskim vektorjem \vec{n} , za kot velikosti ϑ , opišemo z operatorjem \mathcal{R} ter pripadajočo rotacijsko matriko \mathbf{R}_g . Kvaternion je vsota skalarja in trirazsežnega vektorja, za rotacijski kvaternion \hat{q} pa imamo še dodatno zahtevo, da ima normo 1. Zato ga lahko zapišemo v obliki

$$\hat{q} = q_0 + \vec{q} = \cos \frac{\vartheta}{2} + \vec{n} \sin \frac{\vartheta}{2}.$$

Bazo trirazsežnega evklidskega prostora razširimo na bazo štirirazsežnega prostora kot

$$\left\{1 + \vec{0}, 0 + \vec{g}_1, 0 + \vec{g}_2, 0 + \vec{g}_3\right\} = \left\{\hat{1}, \hat{g}_1, \hat{g}_2, \hat{g}_3\right\}. \quad (1)$$

Naj ima kvaternion \hat{q} v tej bazi stolpčni zapis $\hat{\mathbf{q}}_g = [q_{0g}, q_{1g}, q_{2g}, q_{3g}]^T$. Poljuben vektor $\mathbf{a}_g \in \mathbb{R}^3$ lahko enakovredno rotiramo z rotacijsko matriko \mathbf{R}_g ter z rotacijskim kvaternonom $\hat{\mathbf{q}}_g$ na sledeč način:

$$\mathbf{R}_g \mathbf{a}_g = [\hat{\mathbf{q}}_g \circ \hat{\mathbf{a}}_g \circ \hat{\mathbf{q}}_g^*]_{\mathbb{R}^3}, \quad (2)$$

kjer je $\hat{\mathbf{q}}_g^* = q_{0g} - \mathbf{q}_g = [q_{0g}, -q_{1g}, -q_{2g}, -q_{3g}]^T$ konjugirani rotacijski kvaternion, $\hat{\mathbf{a}}_g$ je razširitev vektorja \mathbf{a}_g na kvaternion z ničelnim skalarnim delom: $\hat{\mathbf{a}}_g = 0 + \mathbf{a}_g$ (čisti kvaternion), $[\quad]_{\mathbb{R}^3}$ pomeni skrčitev čistega kvaterniona na vektorski del, operacija “ \circ ” pa pomeni običajen kvaternionski produkt

$$\hat{\mathbf{a}} \circ \hat{\mathbf{b}} = \left(a_0 b_0 - \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} \right) + \left(b_0 \vec{\mathbf{a}} + a_0 \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} \right) \quad (3)$$

za poljubna kvaterniona $\hat{\mathbf{a}} = a_0 + \vec{\mathbf{a}}$ in $\hat{\mathbf{b}} = b_0 + \vec{\mathbf{b}}$ ($a_0, b_0 \in \mathbb{R}$, $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^3$); uporabljeni sta standardna produkta iz trirazsežnega vektorskoga prostora, skalarni “.” in vektorski “ \times ”. Zaradi nekomutativnosti ločimo levo in desno kvaternionsko množenje. Obe množenji sta linearne operatorja na \mathbb{R}^4 ter ju lahko zapišemo tudi matrično (glej [9]) in sicer, $\hat{\mathbf{q}}_g \circ \hat{\mathbf{x}}_g = \Phi_L(\hat{\mathbf{q}}_g) \hat{\mathbf{x}}_g$ in $\hat{\mathbf{x}}_g \circ \hat{\mathbf{q}}_g = \Phi_R(\hat{\mathbf{q}}_g) \hat{\mathbf{x}}_g$. Enakost (2) tako dobi še obliko

$$\mathbf{R}_g \mathbf{a}_g = [\Phi_L(\hat{\mathbf{q}}_g) \Phi_R(\hat{\mathbf{q}}_g^*) \hat{\mathbf{a}}_g]_{\mathbb{R}^3} \quad \text{oziroma} \quad \mathbf{R}_g = [\Phi_L(\hat{\mathbf{q}}_g) \Phi_R(\hat{\mathbf{q}}_g^*)]_{\mathbb{R}^3}. \quad (4)$$

Naj rotacija \mathcal{R} rotira med ortonormiranimi bazama $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ in $\{\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3\}$. Potem ima pripadajoča rotacijska matrika v obeh izbranih bazah isti zapis $\mathbf{R}_g = \mathbf{R}_G = \mathbf{R}$. Enako velja za rotacijski kvaternion ter za razširjeni bazi (glej 1) $\{\hat{1}, \hat{g}_1, \hat{g}_2, \hat{g}_3\}$ in $\{\hat{1}, \hat{G}_1, \hat{G}_2, \hat{G}_3\}$

$$\hat{\mathbf{q}}_g = \hat{\mathbf{q}}_G = \hat{\mathbf{q}}.$$

3 Model linijskega nosilca

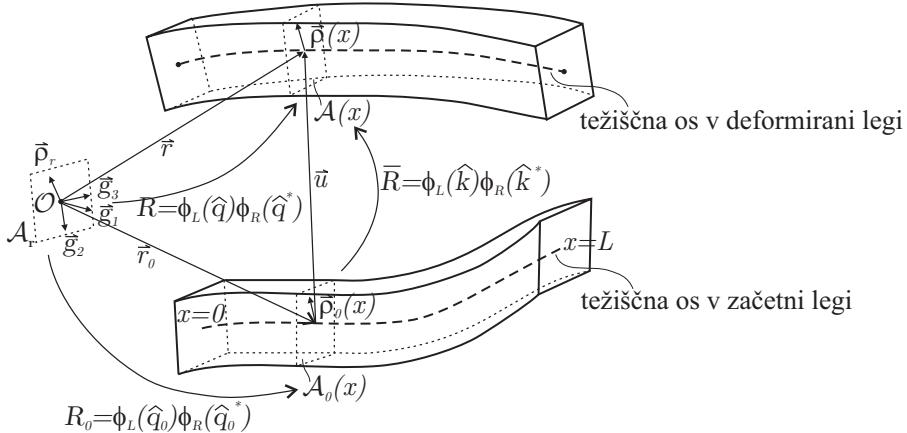
Prostorski linijski nosilec je računski model telesa v prostoru, ki ima eno dimenzijo izrazito večjo kot ostali dve. Začetno lego nosilca natančno določata dve zvezni količini, glej sliko 1: prostorska krivulja $\Gamma_0 = \left\{ \vec{r}_0(x), \quad x \in [0, L] \right\}$, kjer je $\vec{r}_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ zvezna in zvezno odvedljiva vektorska funkcija, x naravni parameter krivulje Γ_0 ter L njena dolžina, predstavlja težiščno os nosilca v začetni legi; množica začetnih rotacij

$$\mathcal{R}_0(x) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \mathcal{R}_0(x) : \mathcal{A}_r \mapsto \mathcal{A}_0(x),$$

preslikava referenčni prerez \mathcal{A}_r v množico prečnih prerezov nosilca v začetni legi $\mathcal{A}_0(x)$.

To je usklajeno z Bernoullijevo hipotezo o nespremenljivosti prečnih prerezov, kar pomeni, da se ohranjanje ploščine in oblike, tudi planarnost, prečnih prerezov. Dopuščen pa je zasuk prečnih prerezov glede na težiščno os v poljubni konfiguraciji.

Krajevni vektor do poljubne točke $\mathfrak{D}_0(x)$ nosilca v začetni legi zapišemo prek parametrizacije težiščne osi z naravnim parametrom ter z rotacijo vektorjev v območju \mathcal{A}_r referenčne ravnine, $\vec{r}_0^\mathfrak{D}(x, \xi_2, \xi_3) = \vec{r}_0(x) + \mathcal{R}_0(x) \vec{\rho}_r(\xi_2, \xi_3)$. Geometrijo linijskega prostorskega nosilca v začetni legi določa množica točk $\mathcal{B}_0 = \left\{ \vec{r}_0^\mathfrak{D}(x, \xi_2, \xi_3), \quad x \in [0, L] \quad \text{in} \quad (\xi_2, \xi_3) \in \mathcal{A}_r \right\}$.



Slika 1 : Model nosilca.

Deformirana lega nosilca je lega nosilca po deformaciji zaradi obtežbe. Poljubno točko težiščne osi v trenutni legi $\vec{r}(x)$ izrazimo s pomikom $\vec{u}(x)$ točk $\vec{r}_0(x)$ iz začetne lege, torej je težiščna os v deformirani legi krivulja $\Gamma_D = \left\{ \vec{r}(x) = \vec{r}_0(x) + \vec{u}(x), \quad x \in [0, L] \right\}$. Družino prečnih prerezov v trenutni legi dobimo tako, da z družino rotacij $\overline{\mathcal{R}}(x)$ zasukamo prečne prerezne iz začetne lege:

$$\overline{\mathcal{R}}(x) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \overline{\mathcal{R}}(x) : \mathcal{A}_0(x) \mapsto \mathcal{A}(x). \quad (5)$$

Potem lahko krajevni vektor poljubne točke $\mathfrak{D}(x, \xi_2, \xi_3)$ trenutne lege nosilca zapišemo kot

$$\begin{aligned}\vec{r}^{\mathfrak{D}}(x, \xi_2, \xi_3) &= \vec{r}_0(x) + \vec{u}(x) + \overline{\mathcal{R}}(x) \vec{p}_0^{\mathfrak{D}}(\xi_2, \xi_3) \\ &= \vec{r}_0(x) + \vec{u}(x) + \overline{\mathcal{R}}(x) \mathcal{R}_0(x) \vec{p}_r^{\mathfrak{D}}(\xi_2, \xi_3) \\ &= \vec{r}_0(x) + \vec{u}(x) + \mathcal{R}(x) \vec{p}_r^{\mathfrak{D}}(\xi_2, \xi_3),\end{aligned}$$

kjer \mathcal{R} označuje celotno rotacijo referenčnega prereza \mathcal{A}_r , $\mathcal{R} = \overline{\mathcal{R}} \mathcal{R}_0$. Geometrijo linijskega prostorskega nosilca v deformirani legi določa množica točk $\mathbf{B} = \left\{ \vec{r}^{\mathfrak{D}}(x, \xi_2, \xi_3) \mid x \in [0, L] \text{ in } (\xi_2, \xi_3) \in \mathcal{A}_r \right\}$.

Za reševanje enačb je ugodno, če izberemo različne ortonormirane baze prostora. *Fiksna baza* $\left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3 \right\}$ ima izhodišče v fiksni izbrani točki O , prvi bazni vektor je normalen na referenčni prerez, medtem ko \vec{g}_2 in \vec{g}_3 ležita v smeri glavnih vztrajnostnih osi referenčnega prereza \mathcal{A}_r . Vzdolž težiščne osi v nedeformirani legi postavimo spremenljivo bazo v začetni legi $\left\{ \vec{G}_{0,1}(x), \vec{G}_{0,2}(x), \vec{G}_{0,3}(x) \right\}$, ki jo dobimo, ko fiksno bazo preslikamo z začetnimi rotacijami. Podobno vzdolž težiščne osi v deformirani legi postavimo spremenljivo bazo v deformirani legi $\left\{ \vec{G}_1(x), \vec{G}_2(x), \vec{G}_3(x) \right\}$. Za vse prve bazne vektorje velja, da so normalni glede na ustrezni prerez in ne nujno kolinearni s tangento težiščne osi.

4 Enačbe nosilca

Enačbe po Reissnerjevi teoriji, ki uporablajo za parametrizacijo rotacij rotacijski vektor, najdemo v številnih publikacijah, na primer Simo in Vu-Quock [7], Zupan [11] ter mnogi drugi. Za primerjavo navajamo tiste enačbe, katerih zapis je odvisen od parametrizacije rotacije v obeh oblikah. Enačbi konsistence ter enačba, ki povezuje pomike s strižnimi deformacijami $\mathbf{f}_{1q} - \mathbf{f}_{3q}$, so preoblikovane zgolj z uporabo (2), ravnotežne ter materialne enačbe $\mathbf{f}_{5q} - \mathbf{f}_{8q}$ so nespremenjene, le enačba \mathbf{f}_{4q} , ki povezuje rotacije z ukrivljenostjo, je bistveno drugačna. Izpeljava zveže med rotacijskim kvaternonom in ukrivljenostjo, $\widehat{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \widehat{\mathbf{q}} \circ \widehat{\mathbf{k}}_G$, je enaka kot pri enačbi, ki povezuje rotacijo s kotno hitrostjo, le da odvisnost in odvajanje po času nadomestimo z obojim po kraju. Izpeljavo časovne analogije najdemo v matematičnem učbeniku kvaternionov [10] ali v zborniku Kuhljevi dnevi 2008 [9].

$$\begin{array}{ll}\mathbf{f}_1 : \mathbf{RN}_G^c - \mathbf{N}_g = \mathbf{0} & \mathbf{f}_{1q} : \left[\widehat{\mathbf{q}} \circ \widehat{\mathbf{N}}_G^c \circ \widehat{\mathbf{q}}^* \right]_{R^3} - \mathbf{N}_g = \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_2 : \mathbf{RM}_G^c - \mathbf{M}_g = \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{f}}_{2q} : \widehat{\mathbf{q}} \circ \widehat{\mathbf{M}}_G^c \circ \widehat{\mathbf{q}}^* - \widehat{\mathbf{M}}_g = \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_3 : \mathbf{r}'_g - \mathbf{R}(\boldsymbol{\gamma}_G - \mathbf{c}_G) = \mathbf{0} & \mathbf{f}_{3q} : \mathbf{r}'_g - [\widehat{\mathbf{q}} \circ (\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_G - \widehat{\mathbf{c}}_G) \circ \widehat{\mathbf{q}}^*]_{R^3} = \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_4 : \mathbf{d}'_g(x) - \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{d}_g) \mathbf{R}(\mathbf{k}_G - \mathbf{d}_G) = 0 & \widehat{\mathbf{f}}_{4q} : 2\widehat{\mathbf{q}}^* \circ \widehat{\mathbf{q}}' - \left(\widehat{\mathbf{k}}_G - \widehat{\mathbf{d}}_G \right) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{f}_{5q} : \mathbf{N}'_g + \mathbf{n}_g = \mathbf{0} \\ & \mathbf{f}_{6q} : \mathbf{M}'_g + \mathbf{m}_g - \mathbf{N}_g \times \mathbf{r}'_g = \mathbf{0} \\ & \mathbf{f}_{7q} : \mathbf{N}_G^c - C_N(\boldsymbol{\gamma}_G, \mathbf{k}_G) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{f}_{8q} : \mathbf{M}_G^c - C_M(\boldsymbol{\gamma}_G, \mathbf{k}_G) = \mathbf{0}.\end{array}$$

Enačbe $\mathbf{f}_{1q} - \mathbf{f}_{8q}$ rešujemo skupaj z naravnimi robnimi pogoji $\mathbf{h}_1 : \mathbf{S}_g^0 + \mathbf{N}_g^0 = 0$, $\mathbf{h}_2 : \mathbf{P}_g^0 + \mathbf{M}_g^0 = 0$, $\mathbf{h}_3 : \mathbf{S}_g^L - \mathbf{N}_g^L = 0$, $\mathbf{h}_4 : \mathbf{P}_g^L - \mathbf{M}_g^L = 0$. Pomen oznak: g označuje fiksno, G pa spremenljivo bazo tri in štirirazsežnega prostora; \mathbf{N} in \mathbf{M} sta ravnotežna notranja sila in moment; $\boldsymbol{\gamma}_G$ je vektor osnih in strižnih deformacij in $\boldsymbol{\kappa}_G$ vektor torzjskih upogibnih deformacij v spremenljivi bazi; \mathbf{r}_g je krajevni vektor do težiške osi nosilca; $\hat{\mathbf{q}}$ je rotacijski kvaternionski vektor, $\hat{\mathbf{q}} = \cos \frac{\vartheta}{2} + \mathbf{n} \sin \frac{\vartheta}{2}$; \mathbf{c}_G in \mathbf{d}_G sta variacijski konstanti, ki ju določimo iz začetne konfiguracije nosilca; \mathbf{n}_g in \mathbf{m}_g sta vektorja zunanje porazdeljene obtežbe na enoto dolžine osi nosilca v začetni legi; \mathbf{S}_g^0 , \mathbf{S}_g^L , \mathbf{P}_g^0 , \mathbf{P}_g^L so vektorji zunanjih točkovnih sil in momentov na krajišču nosilca; \mathbf{T} je nelinearen operator, ki na poljubnem vektorju \mathbf{a} deluje kot: $\mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{a} + \frac{1-\cos\vartheta}{\vartheta^2} \mathbf{\partial} \times \mathbf{a} + \frac{\vartheta-\sin\vartheta}{\vartheta^3} \mathbf{\partial} \times (\mathbf{\partial} \times \mathbf{a})$. Seveda so vse količine odvisne od naravnega parametra x . Opozorimo na to, da sta (vektorski) enačbi \mathbf{f}_{2q} in \mathbf{f}_{4q} razširjeni na štiri komponente, zaradi kvaternionskega zapisa.

5 Numerično reševanje enačb

Numeričnega reševanja enačb se lotimo v več korakih. Za osnovne spremenljivke izberemo pomik \mathbf{u}_g in rotacijski kvaternionski vektor $\hat{\mathbf{q}}$ rotacije iz začetne lege (glej enačbo (5) in sliko 1), za osnovne enačbe pa konsistentne enačbe, v katerih ravnotežne sile in momente izrazimo iz integriranih ravnotežnih enačb (na območju $[x, \frac{L}{2}]$ ozziroma $[\frac{L}{2}, x]$)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{1q} &= \left[\hat{\mathbf{q}} \circ \hat{C}_N(\boldsymbol{\gamma}_G, \boldsymbol{\kappa}_G) \circ \hat{\mathbf{q}}^* \right]'_{\mathbb{R}^3} + \mathbf{n}_g = \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{2q} &= \left(\hat{\mathbf{q}} \circ \hat{C}_M(\boldsymbol{\gamma}_G, \boldsymbol{\kappa}_G) \circ \hat{\mathbf{q}}^* \right)' + \hat{\mathbf{m}}_g - \hat{\mathbf{N}}_g^{L/2} \times \hat{\mathbf{r}}_g' + \int_x^{L/2} \hat{\mathbf{n}}_g(\xi) d\xi \times \hat{\mathbf{r}}_g' = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Preoblikujemo tudi robne enačbe tako, da robne sile in momente izrazimo iz ravnotežnih enačb z integracijo na polovičnih intervalih elementa, pri levih robnih pogojih na intervalu $[0, \frac{L}{2}]$ ter pri desnih na intervalu $[\frac{L}{2}, L]$. V momentnih robnih enačbah nato še člena $\int_0^{L/2} \mathbf{N}_g(\xi) \times \mathbf{r}_g'(\xi) d\xi$ in $\int_{L/2}^L \mathbf{N}_g(\xi) \times \mathbf{r}_g'(\xi) d\xi$ integriramo po delih:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{1S} &: \mathbf{S}^0 + \mathbf{N}_g^{L/2} + \int_0^{L/2} \mathbf{n}_g d\xi = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_{2S} &: \mathbf{P}^0 + \mathbf{M}_g^{L/2} - \mathbf{N}_g^{L/2} \times (\mathbf{r}_g^{L/2} - \mathbf{r}_g^0) + \int_0^{L/2} \mathbf{n}_g \times (\mathbf{r}_g - \mathbf{r}_g^0) dx + \int_0^{L/2} \mathbf{m}_g d\xi = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_{3S} &: \mathbf{S}^0 - \mathbf{N}_g^{L/2} + \int_{L/2}^L \mathbf{n}_g d\xi = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_{4S} &: \mathbf{P}^0 - \mathbf{M}_g^{L/2} - \mathbf{N}_g^{L/2} \times (\mathbf{r}_g^L - \mathbf{r}_g^{L/2}) + \int_{L/2}^L \mathbf{n}_g \times (\mathbf{r}_g^L - \mathbf{r}_g) dx + \int_{L/2}^L \mathbf{m}_g d\xi = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Desni zgornji indeks označuje vrednosti naravnega parametra, pri kateri je količina izvrednotena, na primer $\mathbf{N}_g^{L/2} = \mathbf{N}_g(\frac{L}{2})$.

Neznani funkciji $\mathbf{u}_g(x)$ in $\hat{\mathbf{k}}(x)$ interpoliramo z izbranimi oblikovnimi funkcijami

$$\tilde{\mathbf{u}}_g(x) = \sum_{p=0}^{N+1} \mathbf{u}_p L_p(x) \quad \tilde{\hat{\mathbf{k}}}(x) = \sum_{p=0}^{N+1} \hat{\mathbf{k}}_p P_p(x).$$

Tako zvezen problem nadomestimo z iskanjem diskretnih vrednosti v točkah x_p za $p = 0, 1, \dots, N+1$. Enačbam $\mathbf{f}_{1q} - \mathbf{f}_{2q}$ po metodi kolokacije zadoščamo v N vnaprej izbranih točkah, ki so enake diskretizacijskim točkam x_p za $p = 1, 2, \dots, N$. Tako sistem sedmih nelinearnih enačb za sedem zveznih neznanih funkcij razпадa na sistem $7(N+2)$ enačb za $7(N+2)$ diskretnih neznank. Dobljeni sistem nelinearnih enačb rešimo z uporabo Newtonove iterativne sheme.

5.1 Linearizacija enačb in upoštevanje popravkov

Rotacija v kvaternionski parametrizaciji je produkt dveh linearnih operatorjev (4), zato je linearizacija členov, v katerih nastopajo rotacijski kvaternioni prav tako preprosta kot linearizacija ostalih količin. Tako je na primer linearizacija enačbe \mathbf{f}_{4q} enaka

$$2\hat{\mathbf{q}}_0^* \circ \delta\hat{\mathbf{k}} \circ \hat{\mathbf{q}}' + 2\hat{\mathbf{q}}^* \circ (\hat{\mathbf{q}}'_0 \circ \delta\hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{q}}_0 \circ \delta\hat{\mathbf{k}}') = \delta\hat{\mathbf{k}}_G,$$

kjer smo upoštevali, da je celoten zasuk $\hat{\mathbf{q}}$ kompozitum začetnega $\hat{\mathbf{q}}_0$ in dodanega $\hat{\mathbf{k}}$ zasuka: $\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{k}} \circ \hat{\mathbf{q}}_0$. Zahtevneje od linearizacije pa je konsistentno upoštevanje linearnih popravkov $\delta\mathbf{u}_g$ in $\delta\hat{\mathbf{k}}$. Popravke pomikov upoštevamo aditivno $\mathbf{u}_g^{[it+1]} = \mathbf{u}_g^{[it]} + \delta\mathbf{u}_g^{[it]}$. Rotacije pa moramo kljub kvaternionski parametrizaciji popravljati multiplikativno. Pri tem je pomembno, da mora biti multiplikativen popravek rotacijski kvaternion, torej mora imeti normo 1. Za $\delta\hat{\mathbf{k}}$ to ne velja, velja pa za soroden enotski popravek

$$\Delta\hat{\mathbf{k}}_g = \cos |\delta\hat{\mathbf{k}} \circ \hat{\mathbf{k}}^*| + \frac{[\delta\hat{\mathbf{k}} \circ \hat{\mathbf{k}}^*]_{R^3}}{|\delta\hat{\mathbf{k}} \circ \hat{\mathbf{k}}^*|} \sin |\delta\hat{\mathbf{k}} \circ \hat{\mathbf{k}}^*|, \quad (6)$$

ki ga nato multiplikativno dodamo rotacijskemu kvaternionu $\hat{\mathbf{k}}^{[it+1]} = \Delta\hat{\mathbf{k}} \circ \hat{\mathbf{k}}^{[it]}$.

6 Numerični primeri

Numerično rešitev smo izračunali v programskem okolju Matlab [5]. Omejili smo se na linearno elastičen materialni model, torej lahko operatorja C_N in C_M iz $\mathbf{f}_{7q} - \mathbf{f}_{8q}$ zapišemo z diagonalnima matrikama

$$C_N = \begin{bmatrix} EA_1 & 0 & 0 \\ 0 & GA_2 & 0 \\ 0 & 0 & GA_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_G \quad C_M = \begin{bmatrix} GJ_1 & 0 & 0 \\ 0 & EJ_2 & 0 \\ 0 & 0 & EJ_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\kappa}_G.$$

E in G določata elastični in strižni modul; A_1 je ploščina prečnega prereza; J_1 je torzijski vztrajnostni moment prereza; A_2 in A_3 sta strižna prereza vdolž glavnih vztrajnostnih osi prereza \vec{G}_2 in \vec{G}_3 ; J_2 in J_3 sta glavna vztrajnostna momenta prečnega prereza okrog osi \vec{G}_2 in \vec{G}_3 .

Tabela 1 : Pomika in zasuk na prostem koncu konzole z momentno obtežbo.

n_e	N	u_X	u_Z	ϑ_Y
1	1	1.01867	14.23718	0.28571
	2	1.35507	14.18880	0.28571
2	1	1.27107	14.20086	0.28571
	2	1.35501	14.18880	0.28571
točna nelin. [6]		1.35500	14.18880	0.28571

n_e =število elementov, N =število notranjih kolokacijskih točk.

Zasuki so za potrebe primerjave naknadno preračunani iz rotacijskih kvaternionov v rotacijske vektorje.

Konzola z momentom. Vzemimo ravno konzolo dolžine $L = 100$ v smeri osi X ter jo na prostem koncu obremenimo z momentom velikosti $M_Y = 100$, ki povzroči velike pomike v smereh X in Z . Ostali materialni in geometrijski podatki so

$$\begin{aligned} E &= 2.1 \cdot 10^4 & G &= 1.05 \cdot 10^4 & A_1 &= 20 & A_2 = A_3 &= 16 \\ J_1 &= 6.4566 & J_2 &= 1.6667 & J_3 &= 666.66. \end{aligned}$$

Iz tabele 1, kjer pomika in zasuk primerjamo z analitičnimi rešitvami [6], je razvidno, da že zelo malo elementov nizkega reda zadošča za zelo točno rešitev, kljub velikim pomikom in zasukom.

Tabela 2 : Pomiki prostega konca ukrivljenega 45° nosilca ob obtežbi iz ravnine.

formulacija	$F = 300$			$F = 600$		
	r_X	r_Y	r_Z	r_X	r_Y	r_Z
raven, $N = 1$	22.16	58.55	40.52	15.91	46.98	53.94
raven, $N = 3$	22.15	58.55	40.44	15.79	46.92	53.42
ukrivljen, $N = 1$	22.16	58.54	40.54	15.91	46.91	54.05
ukrivljen, $N = 3$	22.14	58.54	40.47	15.61	46.89	53.60
[1]	22.5	59.2	39.5	15.9	47.2	53.4
[7]	22.33	58.84	40.08	15.79	47.23	53.37
[2]	22.14	58.64	40.35	15.55	47.04	53.50

število elementov=8, N =število notranjih kolokacijskih točk.

Ukrivljen 45° nosilec sta uvrstila med klasične numerične teste Bathe in Bolourchi [1]. Primer dobro pokaže učinkovitost metode, saj vključuje vse različne načine deformiranja: upogib, strig in torzijo. V začetni legi težiščna os nosilca leži v ravnini ter ima obliko četrtrine krožnice s polmerom 100. Prerez je enotski kvadrat. Nosilec je na enem koncu togo vpet, na drugem pa

obtežen s silo v vertikalni smeri velikosti 300 oz. 600. Elastični in strižni modul sta $E = 10^7$ in $G = E/2$. Ker analitičnih rešitev ni, pomike na prostem koncu primerjamo z drugimi avtorji (glej tabelo 2). Obtežbo smo nalagali v šestih enakih korakih, za vsakega smo potrebovali 5 iteracij za doseganje natančnosti 10^{-9} . Rezultati se dobro ujemajo z ostalimi avtorji.

7 Zaključki

Pokazali smo, da lahko rotacijske kvaternione kot edino parametrizacijo rotacije učinkovito uporabimo za statično analizo prostorskih nosilcev po metodi končnih elemenov. Poleg tega ima prikazana metoda več prednosti: preprostajo linearizacijo rotacijskih količin, ukinjenja dvojnost parametrizacija-operator za rotacije, hkrati pa je formulacija brez blokiranja.

Literatura

- [1] K. J. Bathe, S. Bolourchi, “*Large displacement analysis of three-dimensional beam structures*”, Int. J. Numer. Meth. Eng. 14, 961–986, 1979.
- [2] A. Cardona, M. Géradin, “*A beam finite element non-linear theory with finite rotations*”, Int. J. Numer. Meth. Eng. 26, 2403–2438, 1988.
- [3] G. Jelenić, M. A. Crisfield, *Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain-invariant finite element for statics and dynamics*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **171** 141–171, 1999.
- [4] G. Jelenić, M. Saje, “*A kinematically exact space finite strain beam model–finite element formulation by generalized virtual work principle*”, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 120, 131–161, 1995.
- [5] The MathWorks, Inc., “*MATLAB, Using MATLAB*”, Natick, <http://www.mathworks.com>, 1999.
- [6] M. Saje, S. Srpcič, “*Large deformations of thin curved plane beam of constant initial curvature*”, Int. J. Mech. Sci. 28, 275–287, 1986.
- [7] J. C. Simo, L. Vu-Quoc, *A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: Computational aspects*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 58, 79–116, 1986.
- [8] R. A. Spurrier, *Comment on “Singularity-free extraction of a quaternion from a direction-cosine matrix”*, J. Spacecraft **15**, 255, 1978.
- [9] E. Zupan, M. Saje, *Kvaternionska parametrizacija prostorskih rotacij*, Zbornik del Kuhljevi dnevi 2008, 237–244, 2008.
- [10] J. P. Ward, *Quaternions and Cayley Numbers*, Kluwer academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1997.
- [11] D. Zupan, *Rotacijsko invariantne deformacijske količine v geometrijsko točni teoriji prostorskih nosilcev*, Doktorska disertacija, Univerza v Ljubljani 2003.



Veliki premiki nelinearno elastičnih ravninskih konzol, ki so obremenjene s sestavljenim obremenitvijo

M. Čebron, M. Brojan in F. Kosel¹

Large deflections of non-linearly elastic planar cantilever beams subjected to a combined loading

Povzetek. V tem delu obravnavamo velike premike vitkih, konzolno vpetih nosilcev, ki so obremenjeni z navpično silo na prostem koncu in z lastno težo. Gradivo nosilca je nelinearno elastično. Nelinearna zveza med napetostjo in deformacijo je različna v tlačnem in nateznem območju nosilca. Točnost numeričnih rešitev, ki jih dobimo pri različnih premikih nosilca, smo preverili z eksperimentom.

Abstract. This work discusses large deflections of slender cantilever beams subjected to a combined loading which consists of a vertical force at the free end and self-weight. The material of the cantilever is non-linearly elastic. Different nonlinear relations between stress and strain in tensile and compressive domain are considered. The accuracy of numerical solutions for several deflected configurations of the cantilever is verified experimentally.

1 Uvod

Vitke konstrukcijske elemente lahko deformiramo v stanje velikih premikov tudi ob majhnih relativnih deformacijah. Korektna analiza ravnotežja obremenitev takih primerov zahteva geometrijsko nelinearno obravnavo. V primerih, ko imamo opravka z elementi, izdelanimi iz materiala z nelinearno napetostno-deformacijsko zvezo, pa moramo upoštevati tudi materialno nelinearnost. Geometrijska in materialna nelinearnost tako pogostokrat spremljata razvoj različnih inženirskeh aplikacij: avtomobilskih pnevmatik, tesnil, itn.

Velike premike konzolno vpetega nosilca, narejenega iz nelinearno elastičnega materiala Ludwick-ovega tipa, ki je obremenjen z navpično silo na prostem koncu sta raziskovala Lewis in Monasa [6]. Enak primer nosilca, a obremenjenega z upogibnim momentom na prostem robu, sta omenjena avtorja obravnavala v delu [7], pri čemer sta izpeljala analitično rešitev za vodoraven in navpičen premik prostega konca nosilca. Bayakara, Güven in Bayer [1] so razširili obravnavo Lewisa in Monase z upoštevanjem različnega obnašanja materiala

¹ Vs: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Laboratorij za nelinearno mehaniko

v nateznem in tlačnem območju. Podoben primer, a za neprizmatične nosilce, je obravnaval Brojan [2], ki je čisti upogib neprizmatičnih nosilcev, izdelanih iz materiala, ki se obnaša v skladu s posplošenim Ludwick-ovim zakonom [3]. Lee [5] je raziskal velike premike konzolno vpetega, nelinearno elastičnega nosilca, obremenjenega s konstantno zvezno obremenitvijo in navpično silo na prostem robu.

Reološki zakon mora biti zasnovan tako, da hkrati dobro opiše zvezo med napetostmi in deformacijami, je dovolj enostaven za matematično obravnavo ter omogoča opis obnašanja čim širšega nabora materialov. V področju majhnih deformacij se tudi v nelinearni elastičnosti pogosto uporablja Hooke-ov zakon. Matematično enostavnejši izraz za aproksimacijo nelinearno elastične napetostno-deformacijske zveze v področju večjih deformacij predstavlja Ludwick-ov reološki zakon, ki je podan z izrazom

$$\sigma = \text{sign}(\varepsilon) \cdot E \cdot |\varepsilon|^{\frac{1}{k}}. \quad (1)$$

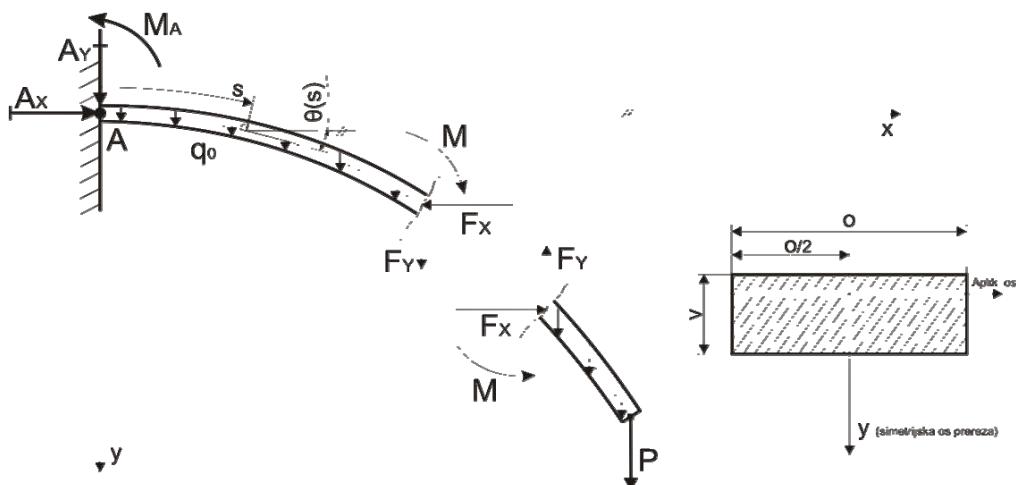
Ludwick-ov reološki model pa ima to lastnost, da gredo vrednosti odvodov funkcije napetosti, ko gre $\varepsilon \rightarrow 0$, bodisi proti ∞ ($k > 1$) bodisi proti vrednosti 0 ($k < 1$), kar pa ne odraža dejanskega obnašanja materialov. To pomanjkljivost sta Jung in Kang v delu [4] odpravila z uporabo posplošene oblike Ludwick-ovega zakona

$$\sigma = \text{sign}(\varepsilon) \cdot E \cdot \left((\varepsilon + \varepsilon_0)^{\frac{1}{k}} - \varepsilon_0^{\frac{1}{k}} \right). \quad (2)$$

Pri vrednosti $\varepsilon_0 = 0$ dobimo iz (2) izraz (1), pri nadalnjem upoštevanju $k = 1$, pa dobimo Hooke-ov zakon.

2 Definicija problema

V prispevku obravnavamo upogib konzolno vpetega nosilca, ki je obremenjen s konstantno zvezno obremenitvijo in z navpično silo na prostem koncu. Nosilec ima na začetku ravno os dolžine L , prerez nosilca je pravokotne oblike, širine o in višine v .



Slika 1: Deformiranje, prečni prerez in obremenitve nosilca.

Kartezični koordinatni sistem x, y postavimo tako, da za njegovo izhodišče izberemo mesto konzolnega vpetja, koordinatna os x pa pri tem sovpada z nedeformirano osjo nosilca. Da je izpolnjen pogoj ravninskega nosilca, mora os y pri tem predstavljati simetrijsko os prečnega prereza. Z s , ($0 \leq s \leq L$), označimo krivočrtno koordinato, ki sledi nevtralni osi v smeri od vpetega proti prostemu koncu nosilca. Kot med tangento na nevtralno os in pozitivno smerjo koordinatne osi x pa označimo s $\theta(s)$.

Predpostavili bomo, da je napetostno stanje v celotnem polju nosilca vseskozi v elastičnem področju materiala. Reološki model gradiva nosilca je izbran tako, da je zveza med napetostnim in deformacijskim stanjem nelinearna v celotnem elastičnem področju, napetostno-deformacijska funkcija pa je v nateznem in tlačnem področju različna. Nelinearno elastična zveza materiala nosilca med napetostjo in deformacijo je podana z izrazom

$$\sigma = \begin{cases} E_N \cdot \left((\varepsilon + \varepsilon_{0,N})^{\frac{1}{n}} - \varepsilon_{0,N}^{\frac{1}{n}} \right); & \varepsilon \geq 0 \\ -E_T \cdot \left((|\varepsilon| + \varepsilon_{0,T})^{\frac{1}{m}} - \varepsilon_{0,T}^{\frac{1}{m}} \right); & \varepsilon < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Naprej predpostavljamo homogenost, izotropnost in nestisljivost gradiva nosilca. Upoštevamo tudi Bernoullijevo teorijo, ki velja za vitke nosilce in po kateri prerezi, ki so v nedeformiranem stanju nosilca plani in pravokotni na nevtralno os, ohranjajo ti dve lastnosti tudi v deformiranem stanju.

3 Osnovne enačbe

V prvi fazi na podlagi obremenitev, geometrijskih zvez in zgoraj navedenih predpostavk tvorimo enačbe, ki so neodvisne od napetostno-deformacijske zveze materiala. Iz ravnotežja zunanjih obremenitev dobimo

$$\sum_i F_{ix} = 0: A_x = 0 ,$$

$$\sum_i F_{iy} = 0: A_y + P + \int_0^L q(s) \cdot ds = 0 \Rightarrow A_y = -P - \int_0^L q_0 \cdot ds = -P - q_0 \cdot L .$$

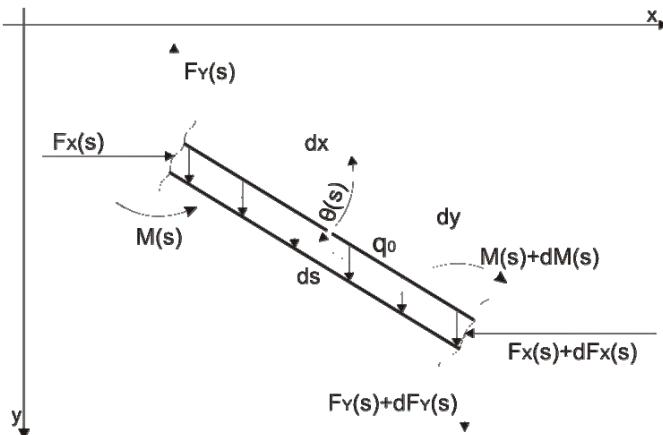
Sledi določitev notranjih veličin stanja

$$F_y(s) = -A_y - \int_0^s q_0 \cdot ds = P + q_0 \cdot L - q_0 \cdot s = P + q_0 \cdot (L - s) , \quad (4)$$

$$F_x(s) = A_x = 0 . \quad (5)$$

Na podlagi slike 2 zapišemo še ravnotežje upogibnih momentov na elementu deformiranega nosilca

$$\sum_i M_i = 0: M(s) + dM(s) - M(s) + F_x(s) \cdot dy + F_y(s) \cdot dx - q_0 \cdot ds \cdot \frac{dx}{2} = 0 . \quad (6)$$



Slika 2: Obremenitve na elementu nosilca.

Po sliki 2 zapišemo tudi naslednji geometrijski zvezi med dx , dy , ds in kotom $\theta(s)$

$$\cos(\theta(s)) = \frac{dx}{ds}, \quad (7)$$

$$\sin(\theta(s)) = \frac{dy}{ds}. \quad (8)$$

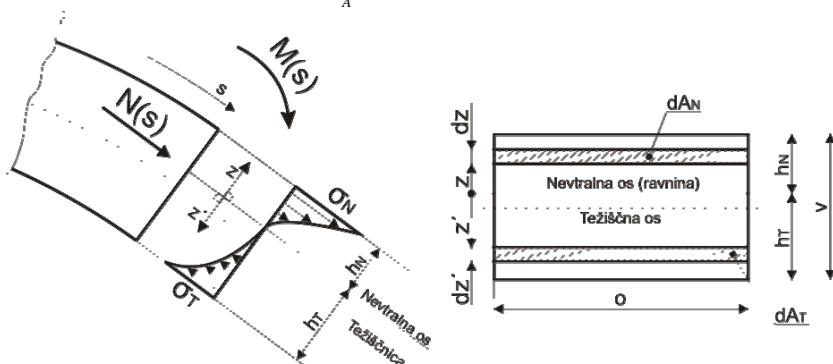
Iz enačbe (6) in izrazov (4), (5) in (7) sledi

$$\frac{dM(s)}{ds} + (P + q_0 \cdot (L - s)) \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{dM(s)}{ds} + (P + q_0 \cdot (L - s)) \cdot \cos(\theta(s)) = 0. \quad (9)$$

4 Vodilna diferencialna enačba

V naslednjem koraku poiščemo zvezo med notranjim momentom in deformacijo nosilca. V ta namen na podlagi slike 3 zapišemo moment napetosti po prerezu glede na položaj nevtralne osi

$$M = \int_A \sigma \cdot z \cdot dA. \quad (10)$$



Slika 3: Napetosti po prečnem prerezu nosilca in njihove rezultante.

V enačbo (10) vstavimo napetostno-deformacijsko zvezo materiala (3) ter povezavo med ukrivljenostjo nosilca ($\rho(s)$) in specifično deformacijo

$$\varepsilon = \rho(s) \cdot z , \quad (11)$$

in dobimo rezultat

$$M = E_N \cdot o \left(\left(\rho \cdot h_N + \varepsilon_{0,N} \right)^{\frac{1+n}{n}} \left(\frac{\rho \cdot h_N \cdot n \cdot (1+n) - \varepsilon_{0,N} \cdot n^2}{\rho^2 \cdot (1+2 \cdot n) \cdot (1+n)} \right) + \frac{\varepsilon_{0,N}^{\frac{1+2n}{n}} \cdot n^2}{\rho^2 \cdot (1+n) \cdot (1+2 \cdot n)} - \varepsilon_{0,N}^{\frac{1}{n}} \frac{(h_N)^2}{2} \right) + \quad (12)$$

$$E_T \cdot o \left(\left(\rho \cdot h_T + \varepsilon_{0,T} \right)^{\frac{1+m}{m}} \left(\frac{\rho \cdot h_T \cdot m \cdot (1+m) - \varepsilon_{0,T} \cdot m^2}{\rho^2 \cdot (1+2 \cdot m) \cdot (1+m)} \right) + \frac{\varepsilon_{0,T}^{\frac{1+2m}{m}} \cdot m^2}{\rho^2 \cdot (1+m) \cdot (1+2 \cdot m)} - \varepsilon_{0,T}^{\frac{1}{m}} \frac{(h_T)^2}{2} \right).$$

Ker je napetostno-deformacijska funkcija različna v nateznem in tlačnem področju, nevtralna os in težišnica prečnih prerezov ne sovpadata. Višini natezno in tlačno obremenjenih delov prečnega prerezeta, h_N in h_T , določimo iz vrednosti rezultante upogibnih napetosti po prečnem prerezu

$$N(s) = \int_A \sigma \cdot dA = 0 \quad (13)$$

$$E_N \cdot \left(\frac{n}{1+n} \cdot \frac{1}{\rho(s)} \cdot \left(\left(\rho(s) \cdot h_N + \varepsilon_{0,N} \right)^{\frac{1+n}{n}} - \varepsilon_{0,N}^{\frac{1+n}{n}} \right) - \varepsilon_{0,N}^{\frac{1}{n}} \cdot h_N \right) = \quad (14)$$

$$E_T \cdot \left(\frac{m}{1+m} \cdot \frac{1}{\rho(s)} \cdot \left(\left(\rho(s) \cdot h_T + \varepsilon_{0,T} \right)^{\frac{1+m}{m}} - \varepsilon_{0,T}^{\frac{1+m}{m}} \right) - \varepsilon_{0,T}^{\frac{1}{m}} \cdot h_T \right).$$

Za izračun h_N in h_T potrebujemo tudi naslednjo zvezo, ki izhaja iz geometrije prerezeta

$$h_N(s) + h_T(s) = v .$$

Rezultat (12) vstavimo v zvezo (9) in upoštevamo eksaktni izraz za ukrivljenost

$$\rho(s) = \frac{d\theta(s)}{ds} .$$

Vodilno diferencialno enačbo v skrajšani obliki zapišemo kot

$$E_N \cdot o \cdot \left(- \frac{2 \cdot n \cdot \left(\frac{d\theta}{ds} \cdot h_N + \varepsilon_{0,N} \right)^{\frac{1+2n}{n}}}{(1+2 \cdot n) \cdot \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^3} \cdot \frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{\left(\frac{d\theta}{ds} \cdot h_N + \varepsilon_{0,N} \right)^{\frac{1+n}{n}} \cdot h_N}{\left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2} \cdot \frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{\left(\frac{d\theta}{ds} \cdot h_N + \varepsilon_{0,N} \right)^{\frac{1+n}{n}}}{\left(\frac{d\theta}{ds} \right)} \cdot \frac{dh_N}{ds} + \right.$$

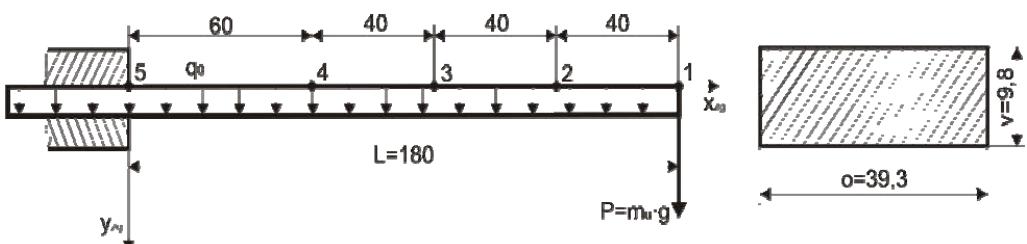
$$\left. \frac{2 \cdot n \cdot \varepsilon_{0,N} \cdot \left(\frac{d\theta}{ds} \cdot h_N + \varepsilon_{0,N} \right)^{\frac{1+n}{n}}}{(1+n) \cdot \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^3} \cdot \frac{d^2\theta}{ds^2} - \frac{\varepsilon_{0,N} \cdot \left(\frac{d\theta}{ds} \cdot h_N + \varepsilon_{0,N} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot h_N}{\left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2} \cdot \frac{d^2\theta}{ds^2} - \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\varepsilon_{0,N} \cdot \left(\frac{d\theta}{ds} \cdot h_N + \varepsilon_{0,N} \right)^{\frac{1}{n}}}{\left(\frac{d\theta}{ds} \right)} \cdot \frac{dh_N}{ds} - \frac{2 \cdot n^2 \cdot \varepsilon_{0,N}^{\frac{1+2n}{n}}}{(1+n) \cdot (1+2 \cdot n) \cdot \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^3} \cdot \frac{d^2\theta}{ds^2} - \varepsilon_{0,N}^{\frac{1}{n}} \cdot h_N \cdot \frac{dh_N}{ds} \Bigg) + \\
 & E_T \cdot o \cdot \left(- \frac{2 \cdot m \cdot \left(\frac{d\theta}{ds} \cdot h_T + \varepsilon_{0,T} \right)^{\frac{1+2m}{m}}}{(1+2 \cdot m) \cdot \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^3} \cdot \frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{\left(\frac{d\theta}{ds} \cdot h_T + \varepsilon_{0,T} \right)^{\frac{1+m}{m}} \cdot h_T}{\left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2} \cdot \frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{\left(\frac{d\theta}{ds} \cdot h_T + \varepsilon_{0,T} \right)^{\frac{1+m}{m}}}{\left(\frac{d\theta}{ds} \right)} \cdot \frac{dh_T}{ds} + \right. \\
 & \frac{2 \cdot m \cdot \varepsilon_{0,T} \cdot \left(\frac{d\theta}{ds} \cdot h_T + \varepsilon_{0,T} \right)^{\frac{1+m}{m}}}{(1+m) \cdot \left(\frac{d\theta}{ds} \right)} \cdot \frac{d^2\theta}{ds^2} - \frac{\varepsilon_{0,T} \cdot \left(\frac{d\theta}{ds} \cdot h_T + \varepsilon_{0,T} \right)^{\frac{1}{m}} \cdot h_T}{\left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2} \cdot \frac{d^2\theta}{ds^2} - \\
 & \left. \frac{\varepsilon_{0,T} \cdot \left(\frac{d\theta}{ds} \cdot h_T + \varepsilon_{0,T} \right)^{\frac{1}{m}}}{\left(\frac{d\theta}{ds} \right)} \cdot \frac{dh_T}{ds} - \frac{2 \cdot m^2 \cdot \varepsilon_{0,T}^{\frac{1+2m}{m}}}{(1+m) \cdot (1+2 \cdot m) \cdot \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^3} \cdot \frac{d^2\theta}{ds^2} - \varepsilon_{0,T}^{\frac{1}{m}} \cdot h_T \cdot \frac{dh_T}{ds} \right) \\
 & + (P + q_0 \cdot (L - s)) \cdot \cos \theta = 0 . \tag{15}
 \end{aligned}$$

Izraze za izračun odvodov h_N in h_T po s , ki nastopajo v enačbi (15), dobimo z odvajanjem zvezne (14) po spremenljivki s .

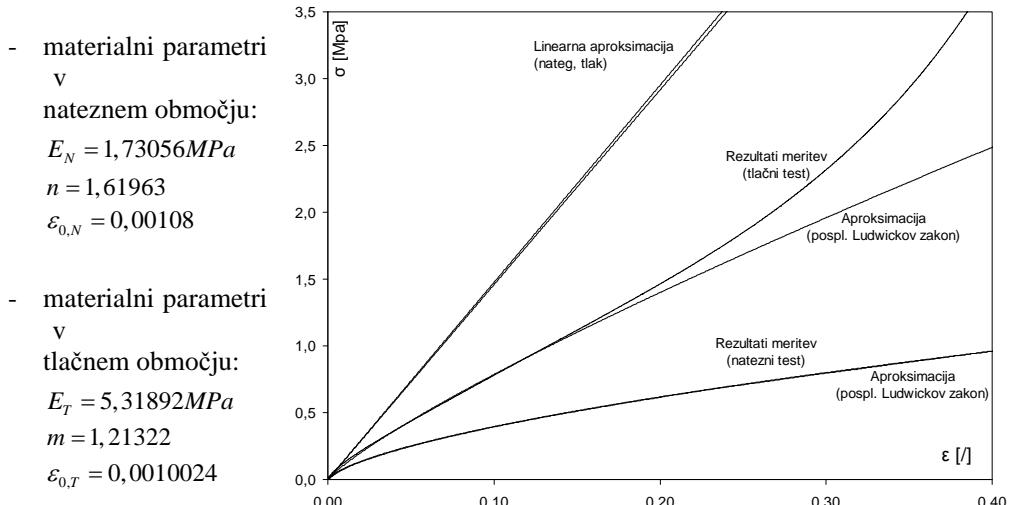
5 Laboratorijski preizkus

Preizkus je bil izveden v Laboratoriju za nelinearno mehaniko na Fakulteti za strojništvo v Ljubljani. Gradivo uporabljenega nosilca je vulkanizat na osnovi naravnega kavčuka s tovarniško identifikacijsko šifro 40523, proizvedeno v podjetju Savatech d.o.o. Preizkus je potekal tako, da smo del nosilca vpeli med dve kovinski plošči, zatem pa smo na prosti konec nosilca obešali uteži različnih mas ter pri tem beležili položaj izbranih preizkusnih točk na zgornji površini nosilca, ki so prikazane na sliki 4.



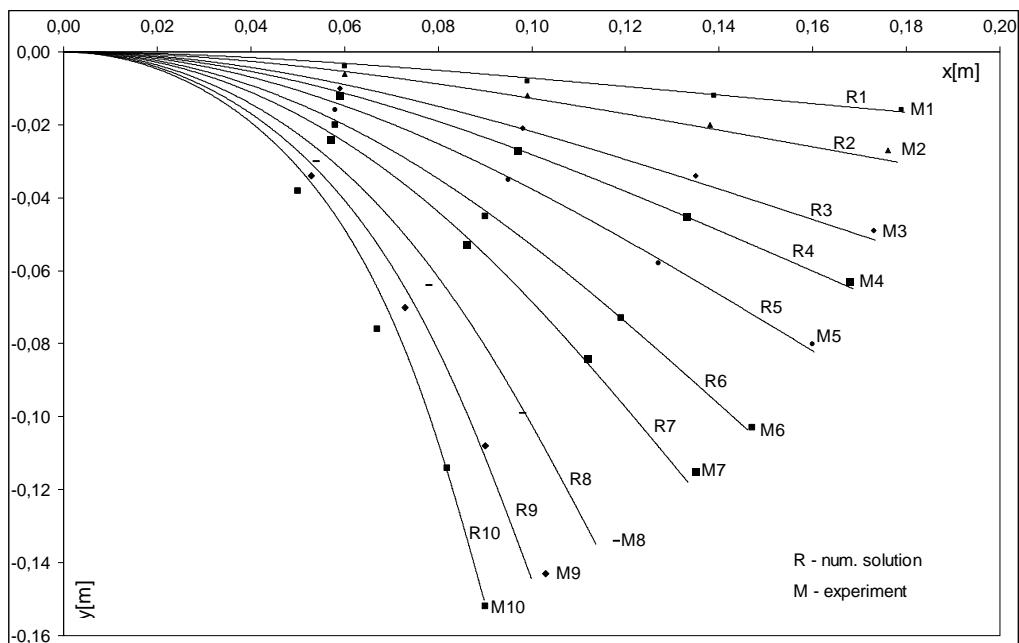
Slika 4: Dimenzijske nosilca in izbrane preizkusne točke na zgornji površini nosilca.

Meritve napetostno deformacijske zveze so bile izvedene na trgalnem stroju Zwick/Roell Z050. Rezultate nateznih meritev smo aproksimirali v območju deformacije $0,0 \leq \varepsilon \leq 0,2$; rezultate tlačnih meritev pa v območju deformacije $0,0 \leq \varepsilon \leq 0,15$.



Slika 5: Aproksimacija merjene napetostno-deformacijske zveze materiala nosilca.

5.1 Rezultati numeričnega reševanja



Slika 6: Primerjava rezultatov laboratorijskega preizkusa in numeričnega preračuna.

Vodilno diferencialno enačbo za pripadajoče robne pogoje našega primera vpetja in obremenitev ($\theta(0) = 0$, $M(L) = 0 \Rightarrow \theta'(L) = 0$) rešujemo po metodi Runge-Kutta-Nyström, pri čemer je uporabljen strelski način določanja manjkajočega začetnega pogoja ($\theta'(0)$). Rešitev enačbe (14) iščemo po Newton-ovi iteracijski metodi. Iz rešitve $\theta(s)$ dobimo pomike $x(s)$ in $y(s)$ z numerično integracijo enačb (7) in (8), ki je izvedena po trapeznem pravilu

$$dx = \cos(\theta(s)) \cdot ds \Rightarrow x(s) = \int_0^s \cos(\theta(s)) \cdot ds; \text{ robni pogoj } x(s=0) = 0,$$

$$dy = \sin(\theta(s)) \cdot ds \Rightarrow y(s) = \int_0^s \sin(\theta(s)) \cdot ds; \text{ robni pogoj } y(s=0) = 0.$$

Primerjava rezultatov numeričnega reševanja in laboratorijskega preizkusa je predstavljena na sliki 6, iz katere je razvidno dobro ujemanje izračunanih in pomerjenih rezultatov, po čemer lahko sklepamo da so izbrane metode analize in reševanja problema ustrezne.

6 Zaključek

V prispevku je obravnavana analiza velikih premikov konzolno vpetega nosilca konstantnega pravokotnega prereza, ki je obremenjen z navpično silo na prostemu koncu in s konstantno zvezno obremenitvijo po dolžini. Gradivo iz katerega je nosilec izdelan je nelinearno elastično. Nelinearna napetostno-deformacijska funkcija je v tlačnem in nateznem področju različna. Točnost rezultatov reševanja je preverjena z laboratorijskim preizkusom, katerega izidi se zelo dobro ujemajo z rezultati preračuna, po čemer lahko sklepamo da so izbrane metode analize in reševanja problema ustrezne.

Literatura

- [1] Baykara C., Güven U., Bayer I., *Large deflections of a cantilever beam of nonlinear bimodulus material subjected to an end moment*, Journal of Reinforced Plastics and Composites, Vol. 24, No. 12, 2005, str. 1321-1326.
- [2] Brojan M., Videnič T., Kosel F., *Non-prismatic non-linearly elastic cantilever beams subjected to an end moment*, Journal of Reinforced Plastics and Composites, Vol. 26, No. 11, 2007, str. 1071-1082.
- [3] Brojan M., Videnič T., Kosel F., *Large deflections of nonlinearly elastic non-prismatic cantilever beams made from materials obeying the generalized Ludwick constitutive law*, Meccanica, 2009, sprejeto v objavo.
- [4] Jung J.H., Kang T.J., *Large deflection analysis of fibers with nonlinear elastic properties*, Textile Res. Journal., Vol. 75, No. 10, 2005, str. 715-723.
- [5] Kyungwoo Lee, *Large deflections of cantilever beams of nonlinear elastic material under a combined loading*, Int. Journal of Non-Linear Mechanics, No. 37, 2002, str. 439-443.
- [6] Lewis G., Monasa F., *Large deflections of cantilever beams of nonlinear materials*, Computers & structures, Vol. 14, No. 5-6, 1981, str. 357-360.
- [7] Lewis G., Monasa F., *Large deflections of cantilever beams of non-linear materials of the Ludwick type subjected to an end moment*, Int. Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 17, No. 1, 1982, str. 1-6.



Optimizacija topologije z uporabo nivojske funkcije in projektnih elementov

M. Kegl^l in B. Harl^l

Topology Optimization Using Level Set Function and Design Elements

Povzetek. Prispevek obravnava optimizacijo topologije zveznih konstrukcij z uporabo nivojske funkcije in projektnega elementa. Novosti v tem pristopu predstavljata uporaba projektnega elementa za parametrizacijo nivojske funkcije ter splošna formulacija optimizacijske naloge, ki ni odvisna od obravnawanega primera. Rezultate začetnih raziskav ilustrira numerični zgled optimirane kratke konzole.

Abstract. This paper discusses topology optimization of continuous structures by using a level set function and a design element. The novelties of this approach are design element usage in order to parameterize the level set function and a general formulation of the optimization problem, which is independent of the considered problem. The results of our initial investigations are illustrated by a numerical example of optimizing a short cantilever.

1 Uvod

Področje optimizacije konstrukcij se je začelo intenzivno razvijati po razmahu učinkovitih numeričnih metod kot sta MKE in MRE. V grobem ga lahko razdelimo na:

- optimizacijo dimenzijskih parametrov (dimenzijske preseza KE, debelina KE, ...),
- optimizacijo oblike in
- optimizacijo topologije konstrukcije.

Prvi dve od navedenih področij sta že relativno dobro raziskani, kar pa ne velja za zadnje področje – optimizacijo topologije. Zametki tega področja so sicer stari že več kot stoletje [1], vendar predstavlja prvi pomembnejši mejnik delo avtorjev Bendsøe in Kikuchi [5], objavljeno leta 1988. V tem delu je postavljen temelj homogenizacijskih metod za optimizacijo topologije konstrukcij. Uporaba teh metod v praksi se je v dobrem desetletju, ki je sledilo objavi, dokaj razširila. Bistvene sestavine homogenizacijskih metod so:

^l Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

- ustreznno modeliranje mikrostruktture (material in praznina) osnovne celice (običajno končnega elementa),
- uporaba homogenizacijske teorije za določevanje makroskopskih lastnosti celice in
- uporaba kriterija optimalnosti za redistribucijo materiala znotraj fiksne domene (konstrukcije).

Uporaba običajnih metod matematičnega programiranja za reševanje optimizacijske naloge praktično ne pride v poštev zaradi ogromnega števila projektnih spremenljivk (na primer, 3 spremenljivke na 1 ravninski končni element). Zaradi tega optimizacijski postopki praviloma temeljijo na uporabi kriterija optimalnosti.

Vzporedno homogenizacijskim metodam so predvsem zaradi svoje enostavnosti postale popularne tako imenovane 'Solid Isotropic Microstructures with Penalization' (SIMP) oziroma 'Power-law' metode, katerih temelje je prav tako postavil Bendsøe [6]. SIMP metode temeljijo na enostavni predpostavljeni (torej znani) relaciji med togostjo celice (elastični modul) in gostoto materiala celice – slednjo privzamemo kot projektno spremenljivko optimizacijske naloge. Relacija med togostjo in gostoto je potenčna, kar ima za posledico, da optimizacijski postopek celico sili v stanje polne togosti (poln material) ali nične togosti (brez materiala) – s tem se količina 'sivih' celic (vmesna togost, ki jo ne moremo niti fizikalno interpretirati, niti tehnološko izvesti) zmanjša na sprejemljivo raven. Število projektnih spremenljivk je pri metodah SIMP manjše (1 spremenljivka na 1 končni element) kot pri homogenizacijskih metodah, vendar je še vedno enormno veliko. Optimizacijski postopki zato praviloma temeljijo na metodi kriterija optimalnosti. Lep pregled čez obe zgoraj predstavljeni vrsti metod je podan v [2].

Tretji tip metod za optimizacijo topologije, ki jih zasledimo pod imeni 'Hard-kill', Evolutionary Structural Optimization (ESO), Bidirectional ESO (BESO), pa so povsem druge vrste. Temeljijo na uporabi intuitivnega kriterija (napetost, gostota energije, ...) na osnovi katerega končni element eliminiramo oziroma (eventualno – odvisno od metode) povrnemo v začetno stanje. To so (idejno in s stališča numerične implementacije) precej enostavne metode, vendar mnogokrat s precej vprašljivimi rezultati. Razvoj teh metod se je začel z objavo članka avtorjev Xie in Steven, [8] v letu 1993.

Vse zgoraj omenjene metode in njihove številne variante imajo kar nekaj pomanjkljivosti, ki v praktičnih aplikacijah povzročajo nemalo težav (vzorci 'šahovnice', negladki robovi, majhni prazni prostori, numerična nestabilnost, neoptimalnost rezultata, ...). Posledica tega je nujnost razvoja in uporabe številnih postopkov, ki te težave vsaj omilijo na kolikor toliko sprejemljivo raven.

Glede na zgoraj opisano predstavlja optimizacija topologije v praksi danes še vedno precejšen izziv in uporaba postopkov je še precej daleč od avtomatizirane in prijazne uporabniku. Ena od možnih poti za spremembo na bolje predstavlja nov tip metod, ki so se začele razvijati pred nekaj leti. Osnovo sta postavila Sethian in Wiegmann [3] z vpeljavo nivojske funkcije v opis spremenljivih mej konstrukcije. Idejo uporabe nivojske funkcije v optimizaciji so nato s podporo metod matematičnega programiranja obogatili Wang in ostali [7]. To je bil začetek razvoja družine zelo obetavnih metod za optimizacijo oblike in topologije hkrati.

V tem prispevku so na kratko povzete osnove metod, ki temeljijo na nivojski funkciji, nato pa so predstavljeni rezultati in izkušnje, ki smo si jih nabrali do sedaj pri razvoju lastne implementacije te metode. Najpomembnejša razlika našega pristopa od ostalih je uporaba

projektnih elementov. Slednje smo uvedli z upanjem, da nam bodo prinesli učinkovitejšo optimizacijo oblike/topologije na račun manjšega števila projektnih spremenljivk in spremenljive geometrije obravnavane domene.

2 Nivojska funkcija in topologija konstrukcije

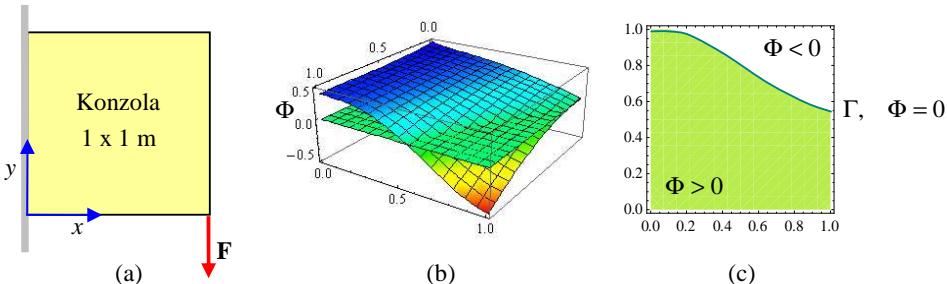
Za ilustracijo osnovnih idej si oglejmo primer optimizacije topologije enostavne (kratke) konzole dimenzijs 1×1 m, slika 1a. Pri optimizaciji topologije želimo določiti tista območja znotraj obravnavane domene Ω , kjer material je, in tista območja, kjer materiala ni. V ta namen na obravnavani domeni (konzola 1×1 m) vpeljemo skalarno polje, slika 1b,

$$\Phi = \Phi(x, y), \quad x, y \in \Omega, \quad (1)$$

ki ga imenujemo *nivojska funkcija*. Dogovorimo se, da naj bo rob materiala določen implicitno kot izo-ploskev (izo-linja v 2D primeru) nivojske funkcije, torej kot

$$\Gamma = \{(x, y), \Phi = 0\}. \quad (2)$$

Materialni del domene je tisti z $\Phi > 0$, praznina pa je tam, kjer je $\Phi < 0$, slika 1c.



Slika 1: Izhodiščna konzola (a), primer nivojske funkcije (b) in razdelitev domene na materialni in prazni del (c).

Implicitna definicija materialne meje je izjemnega pomena, saj nam omogoča, da lahko z enostavno parametrizirano nivojsko funkcijo dobimo zelo raznolike topologije. Materialna in prazna območja lahko torej imajo zelo poljubne oblike, med postopkom optimizacije pa lahko poljubno nastajajo ali izginjajo ter se ločujejo ali zlivajo.

Z uporabo gornjih definicij moramo za izvedbo optimizacije topologije v grobem opraviti še tri ključne korake. In sicer:

- ustrezno parametrizirati nivojsko funkcijo Φ ,
- vgraditi parametrizirano Φ v lastnosti uporabljenega končnega elementa (KE)
- implementirati optimizacijski postopek.

Seveda se različne metode med seboj precej razlikujejo po tem, kako so ti trije koraki izvedeni. V nadaljevanju bo na kratko predstavljen pristop, ki smo ga izbrali v naši raziskovalni skupini.

3 Kratka predstavitev postopka

V nadaljevanju je na kratko predstavljen postopek, ki smo ga poskusno implementirali pri našem delu. Opisane rešitve so namenjene predvsem spoznavanju problematike in nikakor niso 'optimalne' glede na trenutno stanje razvoja teh metod.

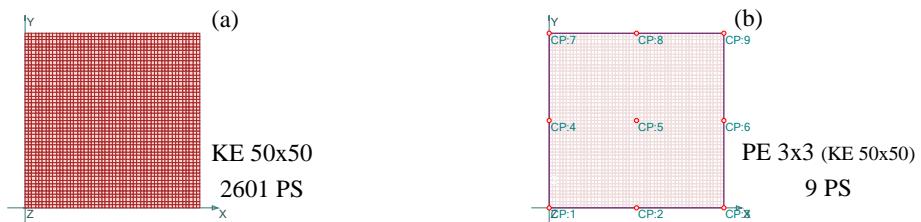
3.1 Parametrizacija nivojske funkcije

V metodah, ki jih lahko zasledimo v literaturi, je običajen pristop k parametrizaciji ta, da se uvede prost parameter (projektna spremenljivka - PS) za vsako vozlišče mreže končnih elementov. Skalarno polje Φ dobimo nato z uporabo ustreznih baznih funkcij – ena od bolj priljubljenih baznih funkcij je radialna bazna funkcija. Dobra lastnost takega pristopa je ta, da je parametrizacija zelo enostavna (rabimo le mrežo končnih elementov (KE), ki jo tako ali tako že imamo), slaba stran pa je seveda ogromno število prostih parametrov (t.j. projektih spremenljivk) in odvisnost kvalitete parametrizacije od gostote mreže KE, slika 2a.

Zaradi slednjega smo se odločili stvari postaviti malo drugače; za parametrizacijo smo uporabili projektni element (PE), slika 2b. Slaba stran tega je, da rabimo projektni element, dobro je pa predvsem to, da je število PS neodvisno od mreže KE in da lahko tudi obliko domene Ω med optimizacijskim postopkom enostavno spremiščamo (optimiramo). Pri taki postavitevi se uvede prost parameter (projektna spremenljivka) za vsako kontrolno točko (KT). Za bazne funkcije za opis nivojske funkcije Φ pa izberemo, na primer, Bernsteinove polinome, radialne bazne funkcije ali pa kaj tretjega. V našem delu smo uporabili kombinacijo prvih dveh omenjenih možnosti. Nivojska funkcija se v tem primeru zapiše kot

$$\Phi = \frac{1-\xi}{2} \Phi_R + \frac{1+\xi}{2} \Phi_B, \quad -1 \leq \xi \leq +1, \quad (3)$$

kjer je Φ_R skalarno polje, dobljeno z radialnimi baznimi funkcijami, Φ_B je skalarno polje, dobljeno z Bernsteinovimi polinomi, ξ pa je parameter, ki ga lahko tudi vključimo v optimizacijo.



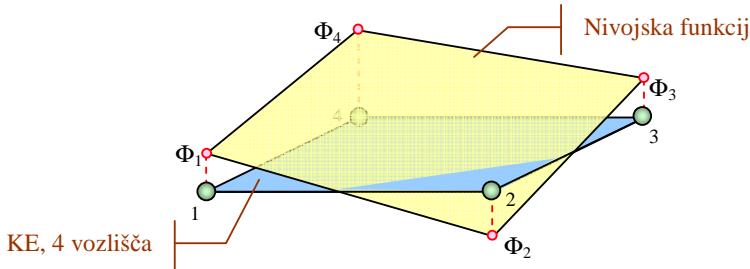
Slika 2: Običajna parametrizacija na osnovi vozlišč KE (a) in parametrizacija preko projektnega elementa (b)

3.2 Vgradnja nivojske funkcije v lastnosti končnega elementa

Običajen pristop, ki smo ga privzeli tudi mi, je, da se nivojska funkcija znotraj KE interpolira na osnovi vozliščnih vrednosti

$$\Phi_i = \Phi(x_i, y_i), \quad (4)$$

kjer sta z x_i in y_i označeni koordinati i-tega vozlišča mreže KE. Kot interpolacijske funkcije lahko vzamemo kar interpolacijske funkcije KE, slika 3.



Slika 3: Nivojska funkcija se znotraj KE interpolira na osnovi vozliščnih vrednosti

Načeloma, bi moral imeti KE naslednje lastnosti:

- element ima polno togost (material), če je $\Phi > 0$ po celiem KE,
- element ima togost nič (praznina), če je $\Phi < 0$ po celiem KE in
- element ima ustrezno togost, če se predznak Φ spreminja znotraj KE.

Načelno gornjih zahtev ni težko zadostiti, vendar je pri tem treba biti pozoren na vrsto morebitnih težav, ki bi se lahko zgodile v optimizacijskem postopku.

Prva težava je možna singularnost togostne matrike v primeru upoštevanja KE s togostjo nič. To lahko enostavno odpravimo na ta način, da ne dovolimo, da togost elementa postane enaka nič, pač pa se lahko ničli le zelo približa.

Druga težava je vezana na zveznost odvodov (tugosti elementa) glede na parametre, ki določajo obliko nivojske funkcije. Za uporabo gradientnih optimizacijskih metod je zveznost odvodov ključnega pomena. Zaradi tega je dobro gornje zahteve nekoliko 'omehčati' v smislu, da se element postopoma približuje polni tugosti ko se nivojska funkcija spreminja iz stanja z mešanim predznakom v stanje s pozitivnim predznakom (po celiem KE). Podobno je seveda treba narediti tudi na drugi strani, in sicer ko se Φ postaja negativna na celiem KE.

Glede na gornje argumente smo se pri naši implementaciji odločili za naslednjo formulacijo: gostota snovi ρ in modul elastičnosti E končnega elementa naj bosta po celiem elementu konstantna, izračunata pa se kot

$$\rho = \rho_0 \bar{\alpha}, \quad E = E_0 \bar{\alpha}, \quad (5)$$

kjer sta ρ_0 in E_0 gostota in elastični modul dejanskega materiala, $0 < \bar{\alpha} < 1$ pa je parameter KE, ki ga izračunamo kot

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha_i \quad (6)$$

pri čemer je

$$\alpha_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(\lambda \Phi_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (7)$$

Pri tem N označuje število vozlišč KE, λ pa je faktor, ki določa 'stopničastost' funkcije arcus tangens.

3.3 Implementacija optimizacijskega postopka

Optimizacijski postopek v [7] temelji na zadostitvi Hamilton-Jacobijeve enačbe, ki sledi iz odvajanja implicitne enačbe mejne ploskve materiala, ter na uporabi kriterija optimalnosti, ki sledi iz minimizacije ene namenske funkcije in omejitvenega pogoja za končni volumen.

Metode, ki temeljijo na uporabi kriterija optimalnosti, so v splošnem računsko precej učinkovite, vendar je treba kriterij optimalnosti izpeljati za vsak specifičen problem posebej. Zaradi tega smo se mi odločili za drugačno pot, ki je povsem splošna in se glede na numerično implementacijo v bistvu ne razlikuje od ostalih vrst optimizacije. Tako so pri nas projektne spremenljivke (zbrane v vektorju \mathbf{b}) parametri nivojske funkcije v kontrolnih točkah PE, lastnosti KE pa so takšne, kot smo jih opisali v predhodnem poglavju. Po diskretizaciji imamo torej na razpolago ravnovesno enačbo

$$\mathbf{F}(\mathbf{b}, \mathbf{u}) - \mathbf{R}(\mathbf{b}) = \mathbf{0}, \quad (8)$$

kjer so \mathbf{F} notranje sile, \mathbf{R} so obremenitve, \mathbf{u} pa je vektor vozliščnih pomikov. Poudarimo, da je ta enačba lahko linearna ali pa nelinearna – odvisno od uporabljenega KE. Od tu naprej je ves postopek optimizacije (tudi občutljivostna analiza) enak kot pri ostalih vrstah optimizacije. V optimizacijsko nalogu lahko vključimo poljubno namensko funkcijo in poljubne omejitvene pogoje.

4 Numerični zgled

Za ilustracijo delovanja predstavljene metode smo poskusili z optimizacijo kratke konzole dimenzij 1×1 m, slika 1a. Debelina konzole je 1 mm, material pa je linearno elastičen z $E_0 = 210 \text{ GPa}$ in $\nu = 0.3$. Na eni strani je konzola togo podprtta, na drugi strani pa točkasto obremenjena z $F = 100 \text{ kN}$. Za parametrizacijo nivojske funkcije smo uporabili 1 projektni element, obravnavali pa smo 3 primere, in sicer:

- primer A, 3×3 KT,
- primer B, 5×5 KT in
- primer C, 7×7 KT.

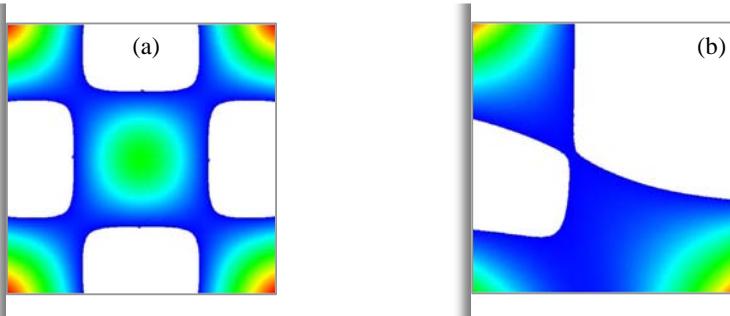
Optimizacijska naloga je za vse tri primere definirana tako: poišči optimalno topologijo konzole (vrednosti projektnih spremenljivk) tako, da bo pomik, u_F , obremenjenega vozlišča minimalen (minimizacija pomika je običajna pri testnih zgledih). Hkrati zahtevamo, da mora biti končni volumen, V , manjši od $\frac{1}{2}V_0$, kjer V_0 označuje volumen polne konzole. Omejitev $\frac{1}{2}V_0$ je običajna pri testnih zgledih, v praksi pa bi jo seveda morali prilagoditi dejanskim zahtevam. Razen tega bomo navzdol omejili tudi normo vektorja projektnih spremenljivk (kontrolne vrednosti nivojske funkcije) – to se je izkazalo za potrebno zaradi zagotavljanja numerične stabilnosti optimizacijskega postopka.

V matematični obliki lahko torej optimizacijsko nalogu zapišemo kot

$$\begin{aligned} \min \quad & u_F \\ \text{s.t.} \quad & V - \frac{1}{2}V_0 \leq 0, \quad 1 - \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M b_i^2} \leq 0, \end{aligned} \quad (9)$$

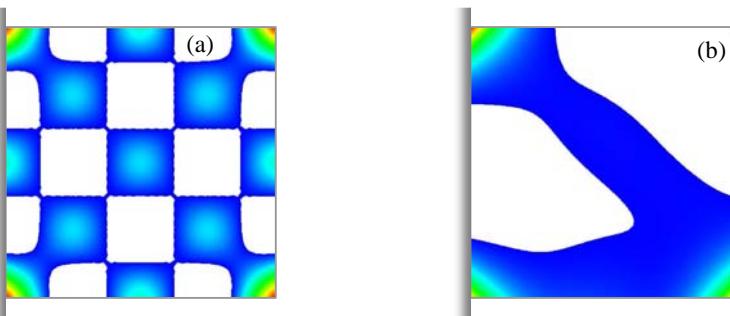
kjer M označuje število projektnih spremenljivk: faktor ξ , enačba 3, ter kontrolne vrednosti nivojske funkcije (1 vrednost na vsako kontrolno točko). Število PS je torej enako 10, 26, in 50 za primere A, B in C. Uporabili smo 8 vozliščni ravninski končni element, vse izpeljave pa so narejene s sistemom AceGen [4].

Postopek optimizacije se je izkazal dokaj stabilnega dokler je bil faktor λ , enačba 7, relativno majhen; to pa je na začetku optimizacijskega postopka. V nadaljevanju optimizacije se faktor λ mora povečati, tako da dobimo jasno mejo med polnim materialom in praznino. Žal se je izkazalo, da povečevanje faktorja λ hkrati povečuje nestabilnost numeričnega postopka. S pazljivim nastavljanjem parametrov optimizacijskega algoritma smo kljub temu nekako prišli do rezultatov. Ti so prestavljeni v nadaljevanju.



Slika 4: Začetna (a) in optimalna (b) topologija za primer A.

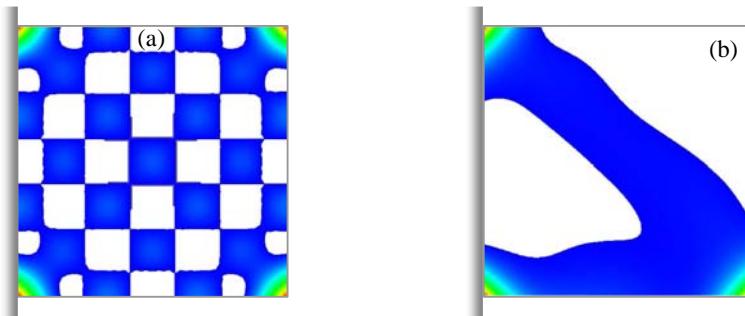
V primeru A je število projektnih spremenljivk ($1 + 3 \times 3 = 10$) daleč premajhno, da bi lahko upali na dober rezultat. Kljub temu nas je zanimalo, ali se bo rešitev naloge približala temu kar intuitivno pričakujemo. Kot kaže slika 4 so bila ta pričakovanja upravičena; na vseh slikah bela barva označuje območje s $\Phi < 0$ oziroma praznino; druge barve odražajo (pozitivno) vrednost nivojske funkcije. Optimalna (normirana) vrednost namenske funkcije je v primeru A bila $u_F^{opt,A} = 2.15$.



Slika 5: Začetna (a) in optimalna (b) topologija za primer B.

V primeru B je število projektnih spremenljivk že nekoliko večje ($1 + 5 \times 5 = 26$), tako da smo lahko pričakovali boljši rezultat. Kot kaže slika 5 so se tudi ta pričakovanja izpolnila. Optimalna vrednost namenske funkcije je v tem primeru bila $u_F^{opt,B} = 1.12$.

V primeru C je bilo število projektnih spremenljivk največje ($1 + 7 \times 7 = 50$), tako da smo lahko pričakovali še boljši rezultat. Kot kaže slika 5 so se ta pričakovanja izpolnila le delno, saj razlika napram primeru B ni ravno dramatična. Optimalna vrednost namenske funkcije je v tem primeru bila $u_F^{opt,C} = 1.09$.



Slika 6: Začetna (a) in optimalna (b) topologija za primer C.

Kot zaključni komentar lahko rečemo, da so dobljeni rezultati vsekakor zanimivi, je pa do učinkovite uporabe in stabilnega obnašanja prikazane metode še dolga pot. Poudarimo še to, da metoda ni omejena na določen tip namenske funkcije (na pr. pomik). Omejitveni pogoji so prav tako lahko povsem poljubni.

Literatura

- [1] A.G.M. Michell, *The limits of economy of material in frame structures*, Phil. Mag. 8, 589-597, 1904.
- [2] G.I.N. Rozvany, *Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics*, Struct. Multidisc. Optim. 21, 90-108, 2001.
- [3] J. A. Sethian, A. Wiegmann, *Structural boundary design via level set and immersed interface methods*, Journal of Computational Physics, 163, 489-528, 2000.
- [4] J. Korelc, *Automatic generation of finite-element code by simultaneous optimization of expressions*. Theoretical Computer Science, 187 (1-2), 231-248, 1997.
- [5] M.P. Bendsøe, N. Kikuchi, *Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 71, 197-224, 1988.
- [6] M.P. Bendsøe, *Optimal shape design as a material distribution problem*, Struct. Optim. 1, 193-202, 1989.
- [7] M.Y. Wang, X. Wang, D. Guo, *A level set method for structural topology optimization*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 192, 227-246, 2003
- [8] Y.M. Xie, G.P. Steven, *A simple evolutionary procedure for structural optimization*, Computers & Structures 49, 885-896, 1993.



Določitev ekstremnih normalnih in ekstremnih strižnih napetosti z uporabo elementarnih neenakosti

R. Flajs¹, G. Turk¹, S. Srپčić¹

Determination of extreme normal and extreme shear stresses using elementary inequalities

Povzetek. V prispevku določimo ekstremne normalne in ekstremne strižne napetosti ter normale pripadajočih ravnin zgolj z uporabo elementarnih neenakosti in osnovnega znanja linearne algebре, torej brez pomoči diferencialnega računa. Zaradi potrebnega skromnega matematičnega predznanja kot tudi zaradi relativne nezahtevnosti izpeljav ocenjujemo, da je postopek primeren za uporabo pri pouku mehanike na univerzitetnem študiju tehnikih strok.

Abstract. In the present paper we establish extreme normal and extreme shear stresses with corresponding planes using elementary inequalities and basic linear algebra, without any usage of differential calculus. Since the prerequisite for good understanding of this article is a basic knowledge of linear algebra and elementary calculus, the undergraduate students can easily follow the proofs.

1 Uvod

V prispevku poiščemo ekstremne normalne in ekstremne strižne napetosti ter normale pripadajočih ravnin brez uporabe diferencialnega računa. Pri izpeljavi uporabimo znanje linearne algebре ter elementarne neenakosti. Za razliko od uveljavljenih načinov izpeljave [1, 2, 3, 4, 5, 6] je iz prikazanih postopkov neposredno razvidna tudi narava rešitev, pa naj gre za **globalni maksimum**, **globalni minimum** ali sedlo.

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

2 Določitev ekstremnih normalnih in ekstremnih strižnih napetosti z uporabo neenakosti

Napetostno stanje delca v kartezičnem koordinatnem sistemu x, y, z predstavimo z matriko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}.$$

Določimo lastne vrednosti $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ in pripadajoče lastne vektorje $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. V nadaljevanju analiziramo pomen lastnih vrednosti ter pokažemo, da so to globalni ekstremi ali sedla. Prav tako lahko iz $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ izračunamo tudi ekstremne strižne napetosti.

2.1 Določitev pomena lastnih vrednosti napetostnega tenzorja

Enotsko normalo \vec{e}_n poljubne ravnine zapišemo z enačbo

$$\vec{e}_n = e_{n1} \vec{e}_1 + e_{n2} \vec{e}_2 + e_{n3} \vec{e}_3, \quad (1)$$

kjer so e_{n1}, e_{n2} in e_{n3} smerni kosinusni glede na osi kartezjskega koordinatnega sistema z bazo $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Z upoštevanjem Cauchyeve enačbe [4, 5] izračunamo pripadajoči vektor napetosti

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_n &= \vec{\sigma}_1 e_{n1} + \vec{\sigma}_2 e_{n2} + \vec{\sigma}_3 e_{n3} \\ &= \sigma_{11} e_{n1} \vec{e}_1 + \sigma_{22} e_{n2} \vec{e}_2 + \sigma_{33} e_{n3} \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Normalna napetost v ravni z normalo \vec{e}_n je določena s projekcijo napetostnega vektorja v smeri normale [4, 5]

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= \vec{\sigma}_n \cdot \vec{e}_n \\ &= \sigma_{11} e_{n1}^2 + \sigma_{22} e_{n2}^2 + \sigma_{33} e_{n3}^2. \end{aligned} \quad (3)$$

V nadaljevanju vseskozi upoštevamo, da je \vec{e}_n enotski vektor normale

$$\|\vec{e}_n\|^2 = e_{n1}^2 + e_{n2}^2 + e_{n3}^2 = 1. \quad (4)$$

Fizikalni pomen posameznih količin je razviden iz slike 1.

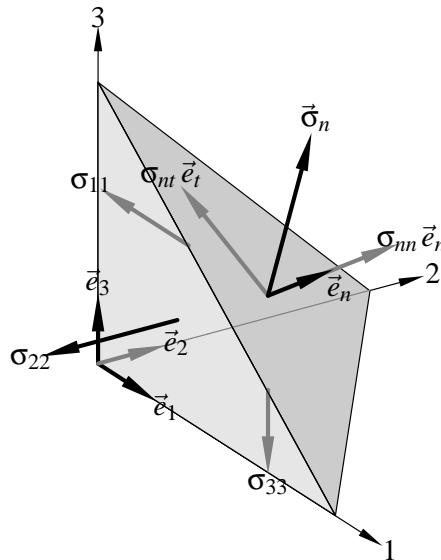
Obravnavamo tri možnosti:

2.1.1 $\sigma_{11} < \sigma_{22} < \sigma_{33}$

Ob upoštevanju norme (4) in enačbe (3) lahko razliko $\sigma_{nn} - \sigma_{11}$ zapišemo v nekoliko drugačni obliki

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} - \sigma_{11} &= (\sigma_{11} - \sigma_{11}) e_{n1}^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{11}) e_{n2}^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11}) e_{n3}^2 \\ &= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) e_{n2}^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11}) e_{n3}^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Iz razlike (5) povzamemo, da je σ_{11} najmanjša normalna napetost, saj so normalne napetosti v vseh možnih ravninah skozi obravnavani delec večje od nje in enakost velja le primeru, da sta



Slika 1: Fizikalni pomen napetosti in napetostnih vektorjev

e_{n2} in e_{n3} enaka nič, oziroma da je $e_{n1}^2 = 1$. Pripadajoči ravnini sta dve koplanarni ravnini. Podobno iz razlike

$$\begin{aligned}\sigma_{nn} - \sigma_{33} &= (\sigma_{11} - \sigma_{33})e_{n1}^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})e_{n2}^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{33})e_{n3}^2 \\ &= (\sigma_{11} - \sigma_{33})e_{n1}^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})e_{n2}^2 \leq 0\end{aligned}$$

povzamemo, da je σ_{33} največja normalna napetost.

Kakšno vlogo igra tu normalna napetost σ_{22} ? Razlika

$$\begin{aligned}\sigma_{nn} - \sigma_{22} &= (\sigma_{11} - \sigma_{22})e_{n1}^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{22})e_{n2}^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{22})e_{n3}^2 \\ &= (\sigma_{11} - \sigma_{22})e_{n1}^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{22})e_{n3}^2\end{aligned}$$

lahko zavzame tako negativne kot tudi pozitivne vrednosti, odvisno od vrednosti smernih kosi-nosov e_{n1} in e_{n3} . Ker zavzame funkcija $\sigma_{nn} : (e_{n1}, e_{n2}, e_{n3}) \mapsto \sigma_{nn}(e_{n1}, e_{n2}, e_{n3})$ v točki $(0, 1, 0)$ v smeri $(t, \sqrt{1-t^2}, 0), t \in [-1, 1]$ lokalni maksimum, v smeri $(0, \sqrt{1-t^2}, t), t \in [-1, 1]$ pa lokalni minimum, ima torej v točki $(0, 1, 0)$ sedlo. Podobno velja za točko $(0, -1, 0)$.

2.1.2 $\sigma_{11} = \sigma_{22} < \sigma_{33}$

Podobno moremo obravnavati tudi možnost $\sigma_{11} < \sigma_{22} = \sigma_{33}$. Iz razlike

$$\begin{aligned}\sigma_{nn} - \sigma_{11} &= (\sigma_{11} - \sigma_{11})e_{n1}^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{11})e_{n2}^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})e_{n3}^2 \\ &= (\sigma_{33} - \sigma_{11})e_{n3}^2 \geq 0\end{aligned}$$

povzamemo, da je σ_{11} najmanjša normalna napetost. Pripadajočih ravnin je več, ker je enačaj dosežen v vseh primerih, ko je $e_{n3} = 0$.

Podobno iz razlike

$$\begin{aligned}\sigma_{nn} - \sigma_{33} &= (\sigma_{11} - \sigma_{33}) e_{n1}^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33}) e_{n2}^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{33}) e_{n3}^2 \\ &= (\sigma_{11} - \sigma_{33}) e_{n1}^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33}) e_{n2}^2 \leq 0\end{aligned}$$

povzamemo, da je σ_{33} največja normalna napetost.

2.1.3 $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$

Iz razlike

$$\begin{aligned}\sigma_{nn} - \sigma_{11} &= (\sigma_{11} - \sigma_{11}) e_{n1}^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{11}) e_{n2}^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11}) e_{n3}^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

zaključimo, da so normalne napetosti v vseh ravninah enake σ_{11} . Gre torej za izotropno oz. hidrostatično napetostno stanje.

2.2 Določitev ekstremnih strižnih napetosti

Z uporabo Pitagorovega izreka in Lagrangeve identitete

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d})$$

dobimo

$$\begin{aligned}\sigma_{nt}^2 &= \vec{\sigma}_n \cdot \vec{\sigma}_n - (\vec{\sigma}_n \cdot \vec{e}_n)^2 \\ &= (\vec{\sigma}_n \cdot \vec{\sigma}_n)(\vec{e}_n \cdot \vec{e}_n) - (\vec{\sigma}_n \cdot \vec{e}_n)^2 \\ &= (\vec{\sigma}_n \times \vec{e}_n) \cdot (\vec{\sigma}_n \times \vec{e}_n) = \|\vec{\sigma}_n \times \vec{e}_n\|^2\end{aligned}$$

Izračunamo

$$\vec{\sigma}_n \times \vec{e}_n = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \sigma_{11} e_{n1} & \sigma_{22} e_{n2} & \sigma_{33} e_{n3} \\ e_{n1} & e_{n2} & e_{n3} \end{vmatrix}$$

in nato še

$$\sigma_{nt}^2 = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 e_{n1}^2 e_{n2}^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 e_{n1}^2 e_{n3}^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 e_{n2}^2 e_{n3}^2. \quad (6)$$

Tu velja omeniti, da preproste enačbe $|\sigma_{nt}| = \|\vec{\sigma}_n \times \vec{e}_n\|$ nismo zasledili v literaturi. Zelo pogosto pa zasledimo njeno izpeljanko (6), vezano na glavni koordinatni sistem [2].

Spet obravnavamo tri primere

2.2.1 $\sigma_{11} < \sigma_{22} < \sigma_{33}$

Očitno velja

$$(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 > \max((\sigma_{11} - \sigma_{22})^2, (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2),$$

zato pričakujemo, da največja strižna napetost nastopi v ravnini z normalo \vec{e}_n , za katero velja $e_{n1}^2 = e_{n3}^2 = \frac{1}{2}$. Dokažimo to trditev.

Zaradi boljše preglednosti uvedemo okrajšave $a = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2$, $B = (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2$, $c = (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2$, $x = e_{n1}^2$, $y = e_{n2}^2$, $z = e_{n3}^2$. Neenakost

$$(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 = ((\sigma_{33} - \sigma_{22}) + (\sigma_{22} - \sigma_{11}))^2 > (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2$$

zapišemo kraješ kot $B > a + c$ ali kot $a < B - c$. Ob upoštevanju zvez $x + y + z = 1$ in $(1 - x)x = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2$ ocenimo

$$\begin{aligned}\sigma_{nt}^2 &= axy + Bxz + cyz = axy + (B - c)xz + cxz + cyz \\ &\leq (B - c)(y + z)x + c(x + y)z = (B - c)(1 - x)x + c(1 - z)z \\ &\leq (B - c)\frac{1}{4} + c\frac{1}{4} = \frac{1}{4}B.\end{aligned}$$

Zaradi ocene $a < B - c$, je enačaj v prvi neenakosti možen samo v primeru, da sta x ali y enaka 0, sicer velja stroga neenakost. Pokazali smo, da je $\sigma_{nt}^2 \leq \frac{1}{4}B$. Po drugi strani pa bi radi v gornji neenačbi dosegli enakost. Ob smiselnem privzetku $y = 0$ iz enakosti

$$\sigma_{nt}^2 = Bxz = B(1 - z)z = B\frac{1}{4}$$

sledi nadaljnja optimalna izbira za $z = \frac{1}{2}$ in $x = 1 - z = \frac{1}{2}$. Maksimum torej dosežemo z izbiro $e_{n1}^2 = \frac{1}{2}$, $e_{n2}^2 = 0$ in $e_{n3}^2 = \frac{1}{2}$. Dobili smo štiri paroma koplanarne ravnine.

Iz vsote (6) je razvidno, da je strižna napetost σ_{nt} enaka nič natanko takrat, ko so vsi členi v vsoti enaki nič. Očitno se to zgodi natanko takrat, ko sta vsaj dve od treh komponent normalne \vec{e}_n enaki nič, oziroma ko je \vec{e}_n normala ene od glavnih ravnin.

2.2.2 $\sigma_{11} = \sigma_{22} < \sigma_{33}$

Podobno moremo obravnavati tudi možnost $\sigma_{11} < \sigma_{22} = \sigma_{33}$.

Velikost strižne napetosti sedaj določimo po enačbi

$$\begin{aligned}\sigma_{nt}^2 &= (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 e_{n1}^2 e_{n3}^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 e_{n2}^2 e_{n3}^2 \\ &= (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 (e_{n1}^2 + e_{n2}^2) e_{n3}^2 \\ &= (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 (1 - e_{n3}^2) e_{n3}^2 \\ &\leq (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Ravnine ekstremnih strižnih napetosti so vse ravnine, katerih tretja komponenta normale zadosti pogoju $e_{n3}^2 = \frac{1}{2}$. Strižna napetost σ_{nt} je enaka nič, če je $e_{n3} = 0$ ali če je $e_{n3}^2 = 1$.

2.2.3 $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$

Očitno zaradi enakosti

$$\sigma_{nt}^2 = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 e_{n1}^2 e_{n2}^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 e_{n1}^2 e_{n3}^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 e_{n2}^2 e_{n3}^2 = 0,$$

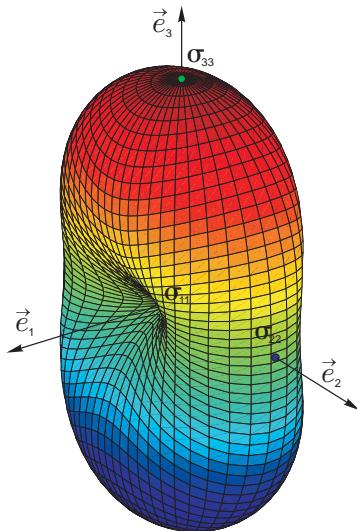
strižnih napetosti ni v nobeni od vseh možnih ravnin skozi obravnavani delec.

3 Računski primeri

3.1 Ekstremne normalne napetosti

Vrednosti normalnih napetosti v odvisnosti od izbranih ravnin z normalami \vec{e}_n lahko prikažemo tudi grafično, tako da vrednost normalne napetosti σ_{nn} v ravnini z normalo \vec{e}_n nanesemo v smeri normale \vec{e}_n . Na sliki 2 prikazujemo takšno ploskev za razmerje glavnih napetosti $\sigma_{11} : \sigma_{22} : \sigma_{33} = 0 : 2 : 3$.

Funkcija $\sigma_{nn} : (e_{n1}, e_{n2}, e_{n3}) \mapsto \sigma_{nn}(e_{n1}, e_{n2}, e_{n3})$ doseže v točki $(1, 0, 0)$ lokalni in hkrati tudi globalni minimum, v točki $(0, 0, 1)$ doseže lokalni in hkrati tudi globalni maksimum, v točki $(0, 1, 0)$ pa ima sedlo, kar je ob upoštevanju relacij $\sigma_{11} = \sigma_{nn}(1, 0, 0)$, $\sigma_{22} = \sigma_{nn}(0, 1, 0)$ in $\sigma_{33} = \sigma_{nn}(0, 0, 1)$ razvidno tudi iz slike 2.



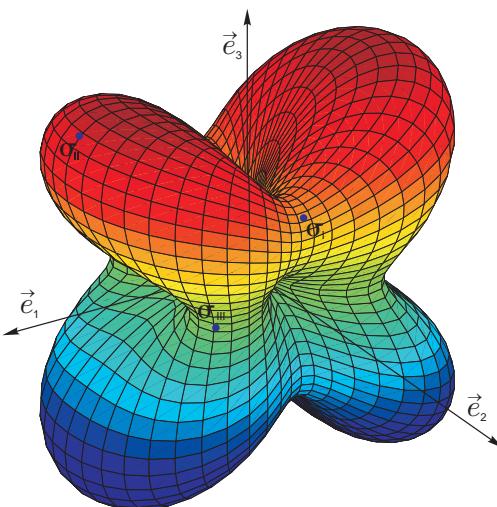
Slika 2: Normalne napetosti σ_{nn} v odvisnosti od normale \vec{e}_n za primer $\sigma_{11} : \sigma_{22} : \sigma_{33} = 0 : 2 : 3$.

3.2 Ekstremne strižne napetosti

Podobno kot vrednosti normalnih napetosti tudi vrednosti strižnih napetosti v ravninah z normalami \vec{e}_n prikažemo grafično, tako da velikost strižne napetosti $|\sigma_{nt}|$ v ravnini z normalo \vec{e}_n

nanesemo v smeri normale \vec{e}_n . Tako dobimo nenevadno oblikovano prostorsko ploskev, ki ima v smereh glavnih osi luknje, saj so strižne napetosti v glavnih ravninah enake nič [5]. Na sliki 3 prikazujemo takšno ploskev za razmerje glavnih napetosti $\sigma_{11} : \sigma_{22} : \sigma_{33} = 1 : 2 : 3$.

Funkcija $|\sigma_{nt}| : (e_{n1}, e_{n2}, e_{n3}) \mapsto |\sigma_{nt}|(e_{n1}, e_{n2}, e_{n3})$ doseže v točki $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ lokalni in hkrati tudi globalni maksimum, v točkah $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ in $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ pa ima sedlo. kar je ob upoštevanju relacij $\sigma_I = |\sigma_{nt}|(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\sigma_{II} = |\sigma_{nt}|(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ in $\sigma_{III} = |\sigma_{nt}|(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ razvidno tudi iz slike 3.



Slika 3: Strižne napetosti $|\sigma_{nt}|$ v odvisnosti od normale \vec{e}_n za primer $\sigma_{11} : \sigma_{22} : \sigma_{33} = 1 : 2 : 3$.

4 Zaključek

V literaturi zasledimo več pristopov pri obravnavi tega problema. Verjeno najbolj razširjen je postopek z uporabo Lagrangevih množiteljev, s katerim izločimo predvsem kandidate za **lokalne ekstreme** [3]. Prednost tega pristopka je v neposredni razvidnosti kandidatov za ekstremne normalne napetosti iz enačb samih. Ti so vsebovani kar v množici lastnih vrednosti tenzorja napetosti. Vendar pa je nadaljnja matematična obravnavava narave rešitev po tej poti zamudna. Tej se zaradi pomanjkanja prostora zaenkrat odpovedujemo. Vseeno pa povzemimo vse skupaj v nekaj stavkih.

Preveriti moramo, ali imamo opravka z globalnim minimumom, globalnim maksimumom ali sedlom. To preverimo z analizo drugih odvodov z uporabo zadostnih pogojev za **lokalne ekstreme**. Seveda lahko vrednosti v dobljenih stacionarnih točkah zgolj izračunamo in primerjamo med seboj, vendar s tem še ne dobimo vpogleda v celotno situacijo. Ker iščemo **globalni** minimum in maksimum, moramo preveriti še vrednosti funkcije na robovih! Kaj so tu

robovi? Tudi upoštevanje simetrije in dejstvo, da imamo opravka s polinomi druge (četrte) stopnje, samo reševanje nekoliko poenostavi, lokalni maksimum postane globalni itd. Vseeno pa je podrobna matematična obravnava sitna in se ji zato avtorji v učbenikih in na predavanjih, z upravičenim izgovorom, da ti matematični dodatki niso pomembni za samo razumevanje mehanskega obnašanja, običajno izognejo ter jo v celoti preložijo na pleča študentov.

Prednost postopka, opisanega v tem prispevku, je v tem, da je v vseh primerih razen rešitve neposredno razvidna tudi njena narava; razen tega pri sami izpeljavi nikjer ne potrebujemo diferencialnega računa, kar večini študentov razumevanje zahtevne snovi močno olajša.

Literatura

- [1] Fung, Y. C. *A First Course in Continuum Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965
- [2] Fung, Y. C.; Pin Tong *Classical and Computational Continuum Mechanics*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2001
- [3] Mase, G. E. *Continuum Mechanics*, Schaum's outline series, McGraw-Hill, New York, 1970.
- [4] Srپčič, S. *Mehanika trdnih teles*, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 2004.
- [5] Stanek, M.; Turk, G. *Osnove mehanike trdnih teles*, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 1998.
- [6] Štok, B. *Mehanika deformabilnih teles*, Zbirka rešenih problemov, I. in II. del, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1988.



Analiza žebeljanega lesenega nosilca

U. Rodman¹, M. Saje¹, I. Planinc¹ in D. Zupan¹

Analysis of timber composite beam

Povzetek. V prispevku obravnavamo obširnejšo analizo žebeljanega lesenega kompozitnega nosilca. Žeblje, ki povezujejo nosilca, smo modelirali z diskretnimi nelinearnimi vzmetmi. Nelinearni konstitucijski zakon za material in povezavo med nosilci povzamemo iz literature. Prispevek zaključimo s primerjavo numeričnih in eksperimentalno dobljenih obtežno deformacijskih krivulj.

Abstract. The article presents the analysis of timber composite beam considering nonlinear contact problem. The connection between two beams is modeled with nonlinear springs. Nonlinear constitutive material model as well as the nonlinear interaction between lamina is taken from literature. The study includes the comparison between numerical and experimental critical loads and load deflection paths.

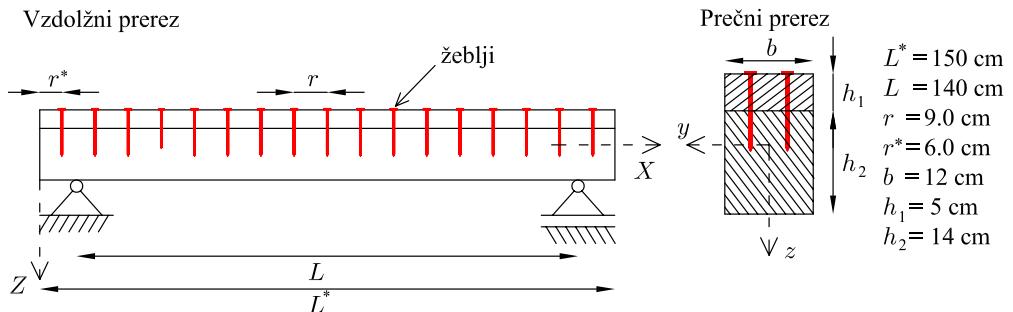
1 Uvod

Osnovne predpostavke numeričnega postopka in modeliranje nelinearnih prostorskih vzmeti smo predstavili v članku [2]. Tukaj pa proučujemo nelinearno obnašanje prečno obremenjenega žebeljanega kompozitnega lesenega nosilca, s poudarkom na modeliranju nelinearnega kontakta med lamelama. Predstavljeni so eksperimentalno določeni vhodni podatki za materialni model in pogoje na stiku, ki so povzeti po literaturi. Sledi primerjava med numeričnimi in eksperimentalnimi rezultati porušnih sil in obtežno-deformacijskih krivulj pri različnih nivojih obtežbe.

2 Model lesenega kompozitnega nosilca

Analiziramo prostoležeči nosilec, ki je sestavljen iz dveh elementov pravokotnega prečnega prereza. Sloja sta med seboj povezana z žeblji, ki jih ekvidistantno zabijemo vzdolž nosilca. Nosilec na sredini razpona obremenimo s točkovno obtežbo, ki jo povečujemo do porušitve. Pri tem opazujemo vertikalne pomike nosilca ter vzdolžni zamik referenčnih točk v odvisnosti od velikosti obtežbe. Geometrijski podatki kompozitnega nosilca so prikazani na sliki 1.

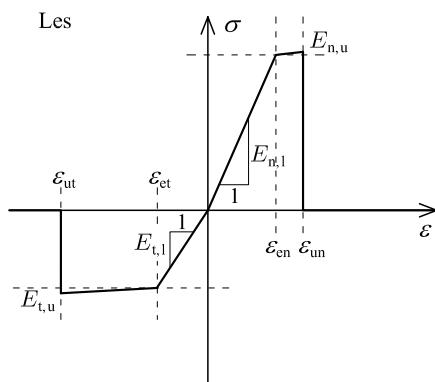
¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Gradbeništvo in Geodezijo



Slika 1: Leseni kompozitni nosilec in geometrijski vhodni podatki.

3 Eksperiment

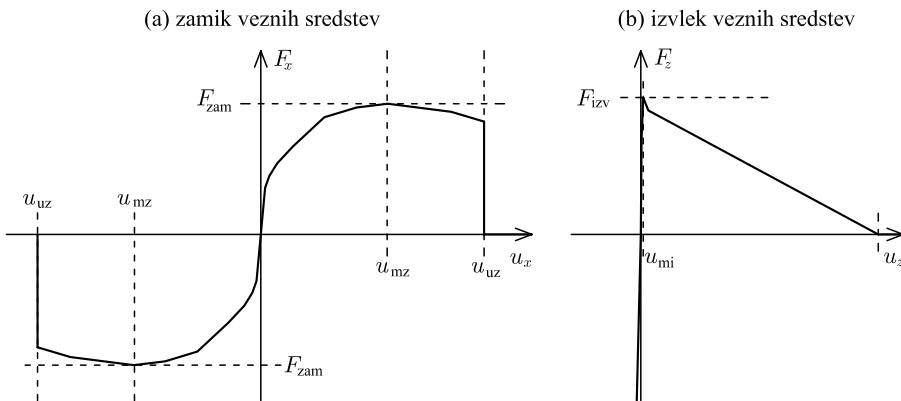
Za nosilec, prikazan na sliki 1, so bile v okviru diplomske naloge ([1]) narejene eksperimentalne raziskave. Preiskanih je bilo več kompozitnih nosilcev z različno postavitvijo veznih sredstev. Nosilci so bili obremenjeni z batom, ki je simuliral točkovno obtežbo. Obtežbo so povečevali do porušitve, pri tem pa merili vertikalne pomike treh referenčnih točk na nosilcu in zamike na stiku med nosilcem (dve meritni napravi; induktivni meritci 'IM' in konjički 'D'). Izmerjene so bile tudi tlačne in natezne trdnosti vzorcev ter opravljene strižne in natezne preiskave nosilnosti veznih sredstev.



Slika 2: Konstitucijski zakon za les.

Računska modela materiala in stika povzamemo po [1]. Za konstitucijski model lesa smo privzeli odsekoma linearen diagram (slika 2). Karakteristične vrednosti specifičnih deformacij so $\epsilon_{en} = 0.0032$, $\epsilon_{et} = -0.0035$, $\epsilon_{un} = 0.0065$, $\epsilon_{ut} = -0.0093$, pripadajoči elastični moduli pa $E_{n,l} = E_{t,l} = 1050 \text{ kN/cm}^2$, $E_{n,u} = 0.1E_{n,l}$, $E_{t,u} = 0.05E_{t,l}$.

Iz rezultatov raziskav podajnosti veznih sredstev ([1]) povzemamo diagrama za strižno in natezno nosilnost posameznega žebbla (slika 3). Konstitucijska modela, prikazana na sliki 3, sta



Slika 3: Konstitucijski zakon za en žebelj v strigu in nategu.

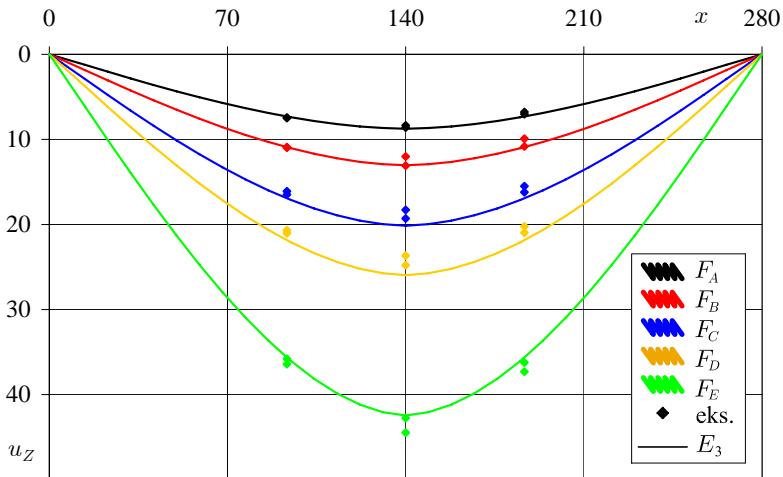
odsekoma linearne diagrama, dobljena na osnovi povprečja eksperimentalnih rezultatov odziva enega žebbla.

4 Numerična analiza

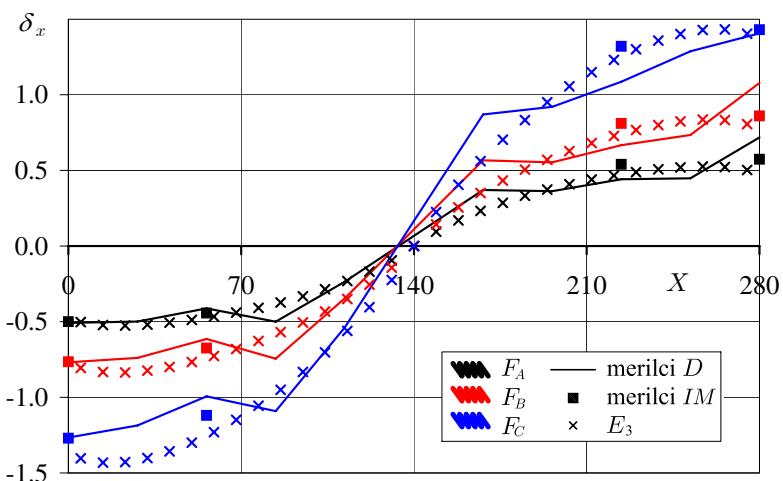
Pri numeričnem reševanju zaradi simetrije modeliramo le polovico konstrukcije. Za model smo uporabili skupno 36 elementov enake dolžine. Za večje število elementov se odločimo zaradi preprostejšega upoštevanja konstitucijskega zakona posameznega veznega sredstva. Nelinearne vzmeti torej postavimo v krajišča vseh elementov, saj se tam nahajajo vezna sredstva. Zaradi velikega števila elementov se odločimo za elemente nižjega reda E_3 .

Numerično analizo naredimo za pet obtežnih primerov ($F_A = 7.624$ kN, $F_B = 11.055$ kN, $F_C = 16.123$ kN, $F_D = 20$ kN in $F_E = 30.25$ kN). Numerične rezultate pripadajočih vertikalnih pomikov osi nosilca prikazujemo na sliki 4 skupaj z rezultati dveh eksperimentov. Iz slike 4 lahko opazimo dobro ujemanje numeričnih rezultatov z eksperimentalnimi za obtežbe F_{A-D} . Malo večja odstopanja numeričnih rezultatov od eksperimenta opazimo le v primeru obtežbe F_E , ki pa je tik pred porušitvijo nosilca. V bližini porušne obtežbe so običajna večja odstopanja pomikov že pri eksperimentih, zato so numerični rezultati dovolj natančni. Na rezultate pomembno vpliva izbrani konstitucijski model materiala in stika. Pri rezultatih za vertikalne pomike je pomembnejši model materiala, ki je bil, kot kažejo rezultati, ustrezен.

Konstitucijski model stika pa za izbrani primer dominira pri osnih pomikih. Zaradi podajnosti veznih sredstev se na stiku zgornjega in spodnjega elementa pojavijo zamiki. Na sliki 5 prikazujemo eksperimentalne rezultate za zamike na stiku skupaj z numerično določenimi. Rezultati so prikazani za različne nivoje obtežbe F_A , F_B in F_C . Ujemanje med eksperimentalnimi in numeričnimi rezultati je malce slabše le ob podporah. Na sliki 6 prikazujemo rezultate



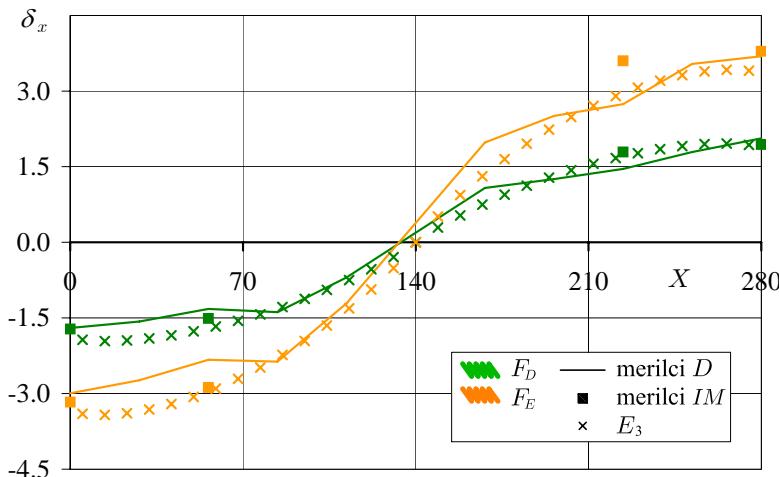
Slika 4: Vertikalni pomiki kompozitnega nosilca za različne obtežbe.



Slika 5: Zamiki vzdolž stika lesenega kompozitnega nosilca za različne nivoje obtežbe.

še za obtežni primer F_D , F_E . Tudi za ta dva obtežna primera opazimo ujemanje numeričnih in eksperimentalnih rezultatov, sploh če upoštevamo razliko med eksperimentalnimi vrednostmi, ki so izmerjene na različna načina. Odstopanja med obema načinoma meritev so večja kot med eksperimentalnimi in numeričnimi rezultati.

Ujemanje računskih in eksperimentalnih rezultatov na vseh nivojih obtežbe nam kaže na to, da



Slika 6: Zamiki vzdolž stika lesenega kompozitnega nosilca za večje obtežbe.

je predstavljeni postopek primeren za analizo sestavljenih lesenih nosilcev. Na deformiranje nosilca in njegovo nosilnost ima največji vpliv izbira ustreznega konstitucijskega modela za material. V preglednici 1 prikazujemo še numerične in eksperimentalne rezultate sil, pri katerih se kompozitni nosilec poruši. Poleg kritičnih sil izpišemo še razliko med eksperimentalnimi in numeričnimi vrednostmi.

Tabela 1: Porušna obtežba kompozitnega nosilca in pripadajoči pomiki.

	eksp. 1	eksp. 2	povp. eks.	num.	razlika [%]
F_Z [kN]	31.37	30.25	30.81	30.64	0.55
u_Z [mm]	50.10	42.75	46.425	43.38	6.56

Tudi v primeru porušnih sil opazimo dobro ujemanje numeričnih in eksperimentalnih rezultatov. Vrednosti končnih pomikov, dobljenih z numerično analizo, so med zgornjo in spodnjo vrednostjo eksperimentalnih rezultatov. Opozorimo še enkrat na precejšen raztros pomikov pri porušni obtežbi in posledično premajhno število eksperimentalnih rezultatov za dobro oceno.

5 Zaključki

V članku smo predstavili uporabo modela nelinearnih prostorskih vzmeti na sodobnih geometrijsko točnih elementih zasnovanih na deformacijskih količinah, ki sta jih razvila Zupan in Saje [3]. Nelinearne prostorske vzmeti so še posebej primerne za modeliranje kompozitnih nosilcev in diskretnih veznih sredstev, kot so žebliji. Predstavljena analiza ponazarja, da je model ustrezен, saj kaže dobro ujemanje z eksperimentalnimi rezultati.

Literatura

- [1] B. Čas, *Vpliv podajnosti stika na togost in nosilnost sestavljenih nosilcev*, Diplomska naloga. Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 1999.
- [2] U. Rodman, M. Saje, I. Planinc, D. Zupan, *Analiza postkritičnega obnašanja delaminiranih prostorskih nosilcev z upoštevanjem kontakta*, Kuhljevi dnevi 2009, Cerkle na Gorenjskem, 24.-25. sept. 2009. Zbornik del. Ljubljana: Slovensko društvo za mehaniko, 2009.
- [3] D. Zupan, M. Saje, *Finite element formulation of geometrically exact three-dimensional beam theories based on interpolation of strain measures*, CMAME 193, 5209–5248, 2003.

Index avtorjev

- Alič, Gregor, 33
Batista, Milan, 114
Beader, Dečan, 25
Benedik, Gašper, 132
Bombač, Andrej, 25
Brojan, Miha, 172
Emri, Igor, 97
Flajs, Rado, 188
Harl, Boštjan, 57, 180
Hočevar, Marko, 33, 132
Hriberek, Matjaž, 1, 49, 124
Jakomin, Marko, 81
Jecl, Renata, 17
Kegl, Marko, 57, 180
Korelc, Jože, 73
Kosel, Franc, 9, 81, 172
Kotur, Milovan, 9
Kramer, Janja, 17
Lupše, Janez, 1, 41
Mejak, George, 89
Melinik, Teja, 73
Mikoš, Matjaž, 148
Močnik, Aljoša, 132
Oblak, Maks, 156
Planinc, Igor, 105, 196
Pušenjak, Rudolf, 156
Ravnik, Jure, 1, 41, 124
Rek, Zlatko, 140
Rodman, Urban, 105, 196
Saje, Miran, 65, 105, 164, 196
Saprunov, Ivan, 97
Simonyants, Rostislav, 97
Sodnik, Jošt, 148
Srpič, Stane, 188
Turk, Goran, 188
Zadravec, Matej, 49
Zupan, Dejan, 65, 105, 164, 196
Zupan, Eva, 164
Šajn, Viktor, 9
Širok, Brane, 33, 132
Škerget, Leopold, 17, 41, 49, 124
Žun, Iztok, 25, 140
Čebron, Matjaž, 172
Četina, Matjaž, 148
Češarek, Peter, 65

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana
531(082)

KUHLJEVI dnevi (2009 ; Cerkle na Gorenjskem)

Zbornik / Kuhljevi dnevi 2009, Cerkle na Gorenjskem, 24.
september 2009 ; uredila Miha Boltežar, Janko Slavič. - Ljubljana:
Slovensko društvo za mehaniko, 2009

ISBN 978-961-91659-4-2

1. Boltežar, Miha
247278080